

Debilidades conceptuales encontradas en estudiantes de Precálculo I en la UPRM

Luis Cáceres, Jhonnatan Ortega

Resumen

Este artículo resume los hallazgos generales encontrados en un grupo de 736 estudiantes de nuevo ingreso al curso de Precálculo I en la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez (UPRM), en cuanto a lo que se ha llamado *debilidades conceptuales y procedimentales*, es decir, a lo que el estudiante debería saber antes de entrar en contacto con la temática a desarrollarse en el curso de Precálculo I. Se presenta un resumen general sobre un sondeo semanal realizado con la colaboración de 13 docentes del área de matemáticas con este grupo de estudiantes, quienes semanalmente reportaron todos aquellos conceptos, que, según el criterio de cada uno de estos docentes, el estudiante debería saber o tener conocimiento de ello. Todos estos docentes desarrollaron las mismas temáticas semanalmente, pues el curso de precálculo I se organizó bajo el mismo calendario académico y siguiendo el mismo libro base. Este trabajo hace parte de un primer resultado obtenido en la investigación que se está realizando bajo la modalidad de “CorequisiteSupport” en la UPRM en el curso de Precálculo I. Esta primera parte servirá como base para construir una futura implementación e investigación de lo encontrado acá alrededor de cada reporte.

Palabras y frases claves: Debilidades matemáticas y procedimentales, conceptos previos, Precálculo I.

Conceptual weaknesses found in Precalculus I students at UPRM

Abstract

This article summarizes the general findings found in a group of 736 new students in the Pre-Calculus I course at The University of Puerto Rico, Mayagüez Campus (UPRM), regarding what has been called conceptual and procedural weaknesses, that is, what student should know before studying the topics developed in the Pre-Calculus I course. A general summary of a weekly survey carried out with the collaboration of 13 math professors with this group of students is presented; all those who weekly reported concepts that according to the criteria of each of these professors the student should know or have knowledge of it. All these professors developed the same topics on a weekly basis, since the Pre-Calculus I course was organized under the same academic calendar and following the same base book. This work is part of a first result obtained in the research that is being carried out under the modality of Corequisite Support at the UPRM in the Pre-Calculus I course. This first part will serve as the basis for building a future implementation and investigation of what is found here around each report.

Key words and phrases: *Mathematical and procedural weaknesses, previous concepts, Precalculus I.*

1 Introducción

Muchos estudiantes de nuevo ingreso en la Universidad de Puerto Rico, del Recinto de Mayagüez (UPRM) en diferentes programas, usualmente presentan dificultades al momento de cursar cursos básicos de matemáticas como en los precálculos, especialmente en Precálculo I. Usualmente, según Mota (2015), las instituciones de educación básica pese a que imparten contenido matemático en todos sus niveles y modalidades, no capacitan suficientemente al estudiante para estudiar el contenido matemático universitario, por lo que los conocimientos previos adquiridos por los estudiantes en su formación preuniversitaria no son suficientes, esto promueve en el estudiante una ruptura en el anclaje de nuevos conocimientos.

Esta ruptura promueve *debilidades conceptuales* en los estudiantes de nuevo ingreso, pues muchos de los conceptos previos y fundamentales que son eje dorsal para la buena adquisición de los nuevos conceptos que se desarrollan en el curso de Precálculo I de la UPRM, no son significativos para la adquisición de nuevos conocimientos en estos estudiantes. Por tal motivo, es común que muchos de estos estudiantes presenten desastrosos en su primer semestre universitario en el curso de Precálculo I. Esto promueve en muchas ocasiones el retiro de muchos de estos estudiantes, del curso o de la universidad, según Castillo Sánchez (2020).

Así mismo, según Balderas (2014), muchos errores en la adquisición de los conceptos previos de los estudiantes en la educación básica desde la perspectiva cognitiva y didáctica están ligados a la formación matemática de sus docentes, es decir, muchas nociones matemáticas erróneas que estos docentes presentan son transmitidas a sus estudiantes progresivamente. Esto promueve una ruptura en el anclaje entre estos conocimientos matemáticos previos que debería conocer y dominar el estudiante, y los nuevos conocimientos que debe adquirir en su formación matemática universitaria. Todo esto promueve lo que se ha denominado como debilidades conceptuales en los estudiantes.

Por otra parte, es común que muchos de los estudiantes, quienes reprueban el curso de Precálculo I, se sometan a cursos remediales, demandando para ellos gastos adicionales. Según el libro Complete CollegeAmerica (2021), donde se reporta un gran porcentaje de estudiantes en los EE. UU, quienes tras el fracaso en sus cursos de matemáticas acuden en gran número a cursos remediales sin mucho éxito, pues según se indica aquí, los cursos remediales no son el camino correcto que promueva la solución al problema. Además, los estudiantes se ven forzados a realizar una inversión adicional en tiempo y dinero en cursos que no hacen parte de su formación profesional, sino que más bien son orientados a reforzar muchos de los conceptos que el estudiante ya debería saber. Además, estos cursos remediales no garantizan el éxito de los estudiantes en los cursos de matemáticas. Por su parte, los estudiantes de nuevo ingreso de la UPRM no son ajenos a esta situación.

Así, partiendo de todo lo anteriormente dicho, la idea que se llevó a cabo en esta investigación obedece a explicitar todas aquellas *debilidades conceptuales* que presentan los estudiantes de nuevo ingreso de la UPRM en el desarrollo del curso de Precálculo I.

Para ello se hizo un estudio de casos como en el caso de Morales (2018), quien realizó un estudio cualitativo y cuantitativo de casos particulares, donde se describe, examina, explica y analiza un fenómeno en un contexto determinado. Así, en nuestro caso, se procedió a realizar un estudio de casos con estudiantes de 13 secciones de Precálculo I de la UPRM durante el primer semestre 2021 - 2022, donde se identificaron todas aquellas *debilidades conceptuales* que se presentaron con mayor frecuencia en estos grupos.

Tal cual como lo sugiere Mora (2013), en matemáticas es indispensable proporcionar herramientas didácticas que permitan una conectividad entre los conocimientos matemáticos, es decir, que le permitan al docente construir un modelo y un medio en el cual se fortalezcan los conocimientos previos que permiten la consolidación de los nuevos conocimientos al estudiante. Esto permite fortalecer las habilidades y destrezas para la labor docente en matemáticas. El desarrollo de esta investigación no es ajeno a esta idea, pues le permite al docente de matemáticas construir un apoyo didáctico preventivo para sus clases de Precálculo I. Así pues, los resultados obtenidos aquí permiten tomar acciones futuras para los cursos de Precálculo I en la UPRM.

Es importante mencionar que la investigación que se presenta en este artículo hace parte de una investigación más general, donde se toman los resultados presentes aquí, para la elaboración de una guía pedagógica complementaria al curso de Precálculo I de la UPRM. El diseño e implementación de esta guía permitirá enfrentar las dificultades o *debilidades conceptuales* más frecuentes en los estudiantes de Precálculo I, antes y durante el desarrollo del curso. Esta investigación está enmarcada bajo el modelo de “co-requisitesupport” según Complete CollegeAmerica (2021)

2 Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se realizó un estudio cualitativo y cuantitativo de casos particulares, donde el interés como ya se explicó anteriormente, se centró en explicitar todas aquellas debilidades conceptuales que presentaron algunos estudiantes de Precálculo I durante el desarrollo del curso. En este orden de ideas, se irá explicando cada uno de los procesos que se llevó a cabo para la recopilación de datos, análisis de datos y explicitación de todo lo que se ha llamado *debilidades conceptuales* en los estudiantes de nuevo ingreso de Precálculo I en la UPRM.

La información fue recopilada semanalmente bajo un sondeo que obedeció a identificar todos aquellos conceptos previos que el estudiante debería saber antes de someterse a un concepto nuevo en el curso de Precálculo I en la UPRM. Para ello, se contó con la colaboración de 13 docentes de la UPRM quienes en su momento se encontraban dictando el curso de Precálculo I a estudiantes de primer semestre de diferentes programas de esta universidad. Cada docente se encargó de realizar un sondeo en cada uno de sus grupos, identificando según su criterio todos aquellos conceptos previos que sus estudiantes no dominaban o deberían saber al momento de adquirir el nuevo conocimiento. A estos conocimientos que el estudiante no dominaba, se les denominó como ya se explicó anteriormente, *debilidades conceptuales* de los estudiantes.

Para la recolección de información a cada instructor se le compartió una carpeta en “Google Drive” con su respectivo nombre, donde debía llenar un reporte semanal respecto a todas las *debilidades conceptuales* que haya detectado en su grupo durante el transcurso de cada semana. Así, cada docente durante las 10 primeras semanas del desarrollo del primer semestre 2021 – 2022, realizó su respectivo informe. De esta manera, a cada docente se le compartió en sus respectivas carpetas un formato único que debía utilizar para este proceso. A continuación, se presenta un ejemplo de uno de los reportes que realizó una docente durante este proceso:

HOJA DE REGISTRO SOBRE DEBILIDADES ENCONTRADAS EN LOS ESTUDIANTES DE PRECÁLCULO I

Nombre instructor(a)		Silvia M. López Gallo
Semana del Lunes 23 de agosto al viernes 27 de agosto de 2021		
DEBILIDADES DEL ESTUDIANTE		
Nº	Destreza matemática	Argumento
1	Jerarquía de operaciones	Es primordial que los estudiantes tengan claro el orden en el que deben realizarse las operaciones aritméticas básicas para resolverlas correctamente con o sin calculadora.
2	Notación de conjuntos	Para indicar, por ejemplo, que 2 es un número natural, muchos estudiantes escriben $2 = \mathbb{N}$. Esto muestra que no conocen notación de conjuntos para escribir $2 \in \mathbb{N}$ o que desconocen o no le prestan importancia al significado del símbolo “=”.
3	Lógica proposicional	Al resolver ecuaciones, muchos estudiantes escriben líneas como las siguientes: $2x = 6$ $= x = 3$ Por tanto, no comprenden o no saben la lógica de enunciados.

Imagen 1: Ejemplo del formato utilizado para el reporte semanal

En este formato, a cada instructor se le pidió llenar información respecto a la destreza matemática considerada como *debilidad conceptual*, en conjunto con el argumento sobre el por qué debía ser considerada tal destreza matemática. Por lo tanto, cada instructor realizó su reporte de acuerdo con su criterio personal, es decir, cada uno de ellos reportaba y argumentaba sobre las destrezas matemáticas consideradas importantes durante el transcurso de sus clases de Precálculo I cada semana.

Es importante mencionar algunas de las estrategias más comunes que fueron implementadas por cada uno de los docentes para recopilar información, y que a su vez le permitieron establecer criterios sobre cada una de las destrezas matemáticas que fueron consideradas en cada uno de sus reportes. Cada docente no sólo tuvo a su disposición los espacios académicos desarrollados durante sus clases de Precálculo I, sino que también contó con espacios académicos semanales de refuerzo y apoyo con sus estudiantes, es decir, cada docente tenía asignado espacios académicos como sus horas de oficina y horas de taller que desarrolló con sus estudiantes. Así mismo, algunos de ellos contaron con espacios académicos adicionales como el *centro de apoyo*; en estos espacios cada estudiante podía acceder de forma voluntaria e independiente a cada una de las salas

virtuales con diferentes docentes, con la motivación de resolver dudas o inquietudes respecto al curso de Precálculo I. Todo lo anterior, permitió a cada uno de los docentes identificar cada una de las destrezas matemáticas que fueron consideradas en sus reportes.

Es importante mencionar que todo el proceso desarrollado en esta investigación se llevó a cabo en su mayoría bajo la modalidad virtual, es decir, durante el primer semestre 2021 – 2022 en la UPRM se consideró abrir espacios académicos híbridos dadas las condiciones sanitarias promovidas por la emergencia del COVID-19. El desarrollo de las clases durante este periodo académico consistió en un 75% de las clases que fueron desarrolladas de forma virtual, y un 25% que fue desarrollado en forma presencial.

3 Análisis de resultados

Tal cual como se mencionó anteriormente, cada docente compartió durante las 10 primeras semanas su respectivo reporte. Así mismo, como se puede apreciar en el ejemplo de la *Imagen 1*, cada uno de ellos reportó según sus criterios y en sus propias palabras las diferentes destrezas matemáticas que ellos enunciaron. Por lo tanto, fue necesario realizar una identificación, en términos de patrones predominantes para cada destreza matemática, sintetizándolos en un reporte general. Por lo tanto, se consideró la frecuencia con la que las destrezas aparecieron en el reporte de todos los docentes cada semana.

Para las dos primeras semanas se consideró un sólo reporte, pues la primera semana fue un espacio de acercamiento y conocimiento general entre los estudiantes y cada uno de sus docentes respecto a cómo se iba a desarrollar el curso de Precálculo I. De acuerdo con esto, el primer reporte fue el siguiente:

Reporte de las 2 primeras semanas de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Valor absoluto	1
Ley de signos (propiedad distributiva)	4
Suma y resta de fracciones (homogéneas o heterogéneas)	8
Operaciones algebraicas (términos semejantes y signos)	5
Descomposición de un número en factores primos	8
Criterios de divisibilidad	3
Simplificación de fracciones	3
Orden en los racionales e irracionales	2
Suma y resta de enteros	3
Desigualdades "menor o igual" "mayor o igual"	1
Productos con expresiones algebraicas	1
Potencias de un número negativo	1
Lenguaje matemático	4
<i>mcm</i> y <i>mcd</i> en los números enteros y fracciones algebraicas	4
Jerarquía de las operaciones	2

Tabla 1: Semanas 1 y 2

El primer reporte contó con mucha variedad en conceptos matemáticos, pues existió gran cantidad de destrezas matemáticas que fueron consideradas por los docentes. Sin embargo, cabe mencionar que muchas de las *debilidades matemáticas* que fueron reportadas aquí, se consideraron de forma más frecuente en las siguientes semanas. Los temas que con mayor frecuencia se mencionaron acá durante estas dos primeras semanas fueron: *suma y resta de fracciones (homogéneas o heterogéneas)*, y *descomposición de un número en sus factores primos*, con una frecuencia de 8 para cada una de ellas.

Los docentes reportaron que sus estudiantes tenían dificultades al momento de realizar sumas y restas en fracciones numéricas o algebraicas, dado que muchos de ellos desconocen o no aplican el *mcm* o el *mcd* al momento de realizar estos cálculos en las expresiones algebraicas. También comentan que sus estudiantes no identifican cuándo se pueden simplificar las expresiones algebraicas, y cuando dos expresiones algebraicas son semejantes. Análogamente, los docentes reportan que muchos de sus estudiantes desconocen los criterios de divisibilidad entre números enteros, lo que promueve que muchos de ellos no sepan expresar un número entero como el producto de sus factores primos. Sin embargo, es importante mencionar que los estudiantes presentaron dificultades particulares que se pueden anexar a las ya mencionadas, por ejemplo, la ley de signos y la jerarquía entre las operaciones. Así mismo, es de suma importancia indicar que algunos de los conceptos matemáticos que fueron considerados aquí por los docentes como *debilidades matemáticas*, se iban a tratar con mayor intensidad a futuro durante el desarrollo del curso, dado que formaban parte del plan de estudios de Precálculo I.

Para la tercera semana, muchas de las destrezas matemáticas que se mencionaron anteriormente fueron consideradas nuevamente por los docentes. Por tal razón, y con el ánimo de identificar aquellas destrezas matemáticas que se repitieron respecto al anterior reporte, se precedió a colorear cada fila de dichas *debilidades matemáticas* en color amarillo, tal cual como se puede observar en la Tabla 2:

Reporte de la semana 3 de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Valor absoluto (con variable)	2
Ley de signos (suma, producto y división)	3
Suma y resta de fracciones (algebraicas)	3
Operaciones algebraicas (términos semejantes y signos)	2
De lenguaje natural a matemático (uso de fórmulas)	4
Porcentajes	2
Producto de expresiones algebraicas	7
Magnitudes (unidades)	1
Tipos de triángulos	1
Fórmulas área y perímetro	2
Teorema de Pitágoras	2
Despejar variable	2
Notación de conjuntos	1

Tabla 2: Semana 3

De acuerdo con este reporte, se puede notar una mayor frecuencia hacia conceptos matemáticos como el *producto de expresiones algebraicas*, y *de lenguaje natural a matemático (uso de fórmulas)*. Cabe mencionar que esta última destreza matemática considera dentro de su contenido algunas de las otras destrezas matemáticas que fueron mencionadas en este reporte, como: tipos de triángulos, teorema de Pitágoras, despejar una variable, fórmulas de área y perímetro de algunas figuras geométricas, magnitudes y porcentajes. Así mismo, es importante mencionar que esta destreza matemática se consideró con mayor rigor una semana más adelante en el plan de estudios de Precálculo I, por lo que no se consideró en principio como una *debilidad matemática* correspondiente a la tercera semana, sino que como veremos más adelante se volvió a considerar después de todo. Por otra parte, respecto a la primera *debilidad conceptual* mencionada, esta se complementa con otras debilidades como *suma y resta de fracciones (algebraicas)* y *ley de signos (suma, producto y división)*.

Los docentes reportaron que sus estudiantes presentaron dificultades para reconocer expresiones algebraicas, por ejemplo, sus partes, sus cualidades, o cuando estas se pueden sumar o restar. Así mismo, notificaron que sus estudiantes presentaban dificultades al momento de realizar productos algebraicos, lo cual acompañado con la anterior *debilidad conceptual* se convierte en un problema aún mayor. Por lo tanto, es necesario realizar aquí un refuerzo respecto a *reconocimiento de expresiones algebraicas (más suma y resta)* y *producto de expresiones algebraicas*; e incluir de forma implícita leyes de signos, lo cual se podría considerar como parte de ellas.

Para la semana número cuatro hubo muchas destrezas matemáticas que se repitieron, igualmente se optó por colorear de amarillo aquellas *debilidades matemáticas* que se habían repetido con menor frecuencia respecto a los reportes anteriores, y se pintó de color verde aquellas destrezas matemáticas iguales o similares a aquellas que se habían considerado con mayor frecuencia respecto a los anteriores reportes; así lo haremos en adelante. De acuerdo con esto, el reporte que se obtuvo en la semana número cuatro se puede ver en la Tabla 3:

Reporte de la semana 4 de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Valor absoluto (con variable)	1
Suma y resta de fracciones (algebraicas)	1
Racionalizar	1
Operaciones entre conjuntos	3
Cambio de representación (lenguaje natural a matemático)	4
Intervalos y desigualdades	2
Notación de conjuntos	4
Fórmulas y conceptos de geometría	3
Teorema de Pitágoras	1
Sustitución de un valor en una expresión algebraica	2
Despejar variable	1

Tabla 3: Semana 4

Conforme a este reporte, se pudo notar una mayor frecuencia hacia conceptos matemáticos como la *notación de conjuntos* y el *cambio de representación de lenguaje natural a matemático*. Los docentes reportaron que muchos de sus estudiantes no saben utilizar notación adecuada al momento de trabajar con conjuntos (en este caso intervalos). Así mismo, comentaron que sus estudiantes presentaron dificultades al realizar algunas operaciones entre intervalos como la unión y la intersección. Por otra parte, como se mencionó anteriormente, en esta semana se trabajó con mayor intensidad el cambio de representación de lenguaje natural a matemático, y tal como se esperaba, algunos docentes indicaron que sus estudiantes continuaron presentando muchas dificultades al momento de realizar una transposición del lenguaje natural al matemático. Este hecho también se justifica según los docentes debido a que muchos de sus estudiantes no conocen las fórmulas matemáticas elementales que se asumen deberían conocer, tal como en el caso del teorema de Pitágoras, fórmulas de área y perímetro de algunas figuras geométricas, y algunos conceptos de geometría básica. Por tal motivo, es indispensable crear una guía previa de refuerzo respecto a nociones matemáticas como la *notación de conjuntos*, *operaciones entre conjuntos (intervalos) como unión e intersección*, y la *trasposición de lenguaje natural a matemático*; esta última atada desde luego con todas las otras debilidades matemáticas que la acompañan, las cuales ya se han venido mencionando en cada uno de los reportes.

Para la semana cinco hubo dos temas en particular que fueron los más frecuentes, y que ya se habían considerado previamente en los anteriores reportes. De acuerdo con esto, el reporte que se obtuvo en la semana número cinco fue el siguiente:

Reporte de la semana 5 de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Despejar y aplicar una fórmula	5
Potencias de un número negativo	2
Tipos de rectas	1
Funciones (método de tabla de valores)	1
Ley de extremos y medios	1
Tipos de triángulos (según lados y ángulos)	4
Ley de signos	1

Tabla 4: Semana 5

Conforme a este reporte, se pudo notar una mayor frecuencia en conceptos matemáticos como *despejar y aplicar una fórmula* y *tipos de triángulos (según lados y ángulos)*. Los docentes reportaron que sus estudiantes presentaron muchas dificultades al momento de despejar una variable de una ecuación, y aplicar el resultado en una fórmula. Lo anterior, acompañado al hecho de que muchos de estos estudiantes no contaban con el formalismo adecuado con el que este proceso se debe realizar, al igual que no comprendían el significado de estos procesos, o que simplemente cometían errores al momento de reemplazar un valor; tal cual como lo sugieren algunos docentes cuando mencionan que sus estudiantes cometen errores en las potencias de números negativos. Son motivos suficientes para considerar que los estudiantes de nuevo ingreso en la UPRM necesitan

un refuerzo previo en conceptos matemáticos asociados a *despejar y aplicar una fórmula*.

Por otra parte, los docentes también mencionaron que muchos de sus estudiantes no tenían conocimientos geométricos básicos, como por ejemplo identificar los tipos de triángulos según sus lados y ángulos. Ellos sugieren que es importante que los estudiantes conozcan estos temas, dado que, en muchos de los ejercicios tratados en las semanas previas, al igual que en algunos de los problemas que fueron considerados durante la semana cinco, se consideraron nociones relacionadas a ellos. Por lo tanto, será indispensable realizar un refuerzo previo en cuanto a la noción matemática *tipos de triángulos (según lados y ángulos)* para futuros estudiantes del curso de Precálculo I en la UPRM.

Por otro lado, algunos docentes también reportaron dificultades en sus estudiantes en nociones matemáticas como la identificación de tipos de rectas en el plano, y en el método de la tabulación. Sin embargo, hay que mencionar que estas nociones matemáticas se fueron fortaleciendo en los estudiantes conforme se fue avanzando en el contenido del curso de Precálculo I, dado que semanas más adelante se trabajó el concepto de función lineal (considerando los tipos de rectas en el plano) y otras funciones, usando desde luego siempre la tabulación como herramienta base.

Para la semana seis hubo algunas destrezas matemáticas que previamente se habían considerado en algunos de los reportes anteriores, para las cuales, en algunos casos, ya se habían considerado como *debilidades matemáticas*, o en otro caso, ya se habían dado razones del por qué no formarían parte de las *debilidades matemáticas*; tal es el caso de la *Tabulación para graficar funciones elementales*. Así mismo, se mencionó que las destrezas matemáticas como *ley de signos y potencia de un número negativo*, se podrían incluir de forma implícita en algunas de las nociones matemáticas que previamente se mencionaron.

Así, el reporte que se obtuvo en la semana seis, fue el siguiente:

Reporte de la semana 6 de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Tabulación para graficar funciones elementales	1
Ley de signos	1
Potencia de un número negativo	1
Polígonos regulares más círculo (sus partes, área y perímetro)	7
¿Dónde está definida una expresión matemática?	8
Despejar ecuaciones cuadráticas	2

Tabla 5: Semana 6

Los temas que con mayor frecuencia se consideraron durante esta semana fueron *Polígonos regulares más círculo (sus partes, área y perímetro)* y *¿dónde está definida una expresión matemática?* Los docentes mencionaron que los estudiantes presentaron dificultades para identificar las partes de los polígonos regulares, al igual que las fórmulas de área y perímetro de estos, incluso algunos de estos docentes mencionaron que sus

estudiantes no tenían conocimiento respecto a qué se entendía por perímetro en una figura geométrica. Estos temas según algunos docentes son fundamentales, dado que formaron parte de muchos de los problemas que se trabajaron durante el desarrollo del curso de Precálculo I.

Por otra parte, muchos docentes argumentan que sus estudiantes presentaron dificultades al momento de establecer o determinar el dominio de una función, dado que desconocen las condiciones que se deben tener en cuenta para que una expresión matemática esté definida en los números reales. Sugieren que es importante reforzar este tema, dado que esta *destreza matemática* formó parte esencial en la continuación del curso de Precálculo I en las siguientes semanas, y es parte esencial en el desarrollo matemático de los estudiantes a futuro.

En este orden de ideas, es necesario diseñar una guía previa de refuerzo para el curso de Precálculo I respecto a las destrezas matemáticas: *polígonos regulares más círculo (sus partes, área y perímetro)* y *¿dónde está definida una expresión matemática?* para los estudiantes de nuevo ingreso en la UPRM.

Para la semana siete se volvieron a considerar algunas destrezas matemáticas que ya habían sido mencionadas en los reportes anteriores, para las cuales ya se argumentó la importancia de fomentar la construcción de guías previas de refuerzo. De acuerdo con esto, el reporte que se obtuvo esta semana fue el siguiente:

Reporte de la semana 7 de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Evaluar expresiones como $f(x + h)$	2
<i>mcm y mcd de expresiones algebraicas</i>	1
Despejar en una ecuación lineal	2
<i>Circunferencia (sus partes analíticamente)</i>	1
Unidades de medida (en ecuaciones, porcentajes, etc.)	5
Función lineal (variable dependiente e independiente con problemas verbales)	5

Tabla 6: semana 7

Las destrezas matemáticas que con mayor frecuencia se consideraron durante esta semana fueron *unidades de medida (en ecuaciones, porcentajes, etc.)* y *función lineal (variable dependiente e independiente con problemas verbales)*. Los docentes mencionaron que sus estudiantes presentaban dificultades al momento de identificar las unidades de medidas al realizar un procedimiento en alguna ecuación, o al momento de trabajar porcentajes, o simplemente al resolver un problema. Así mismo, argumentan que sus estudiantes no dominan la conversión de unidades de medidas, por lo que se cometen muchos errores al respecto cuando se desea resolver un problema matemático.

Por otra parte, señalaron que sus estudiantes presentaban dificultades al momento de construir una función lineal partiendo de un argumento en lenguaje natural, es decir, argumentan que sus estudiantes presentaban problemas al momento de construir la ecuación lineal (partiendo del lenguaje natural) e identificar en ella la variable dependiente o

independiente. En particular, esta *debilidad matemática* forma parte esencial en el desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes, al igual que es parte fundamental en diferentes campos de la ciencia. Especialmente, si consideramos que los estudiantes de Precálculo I hacen parte de diferentes programas de la UPRM. Lo anterior puede resumirse en una sólo destreza matemática que podríamos llamar *problemas verbales con funciones lineales (identificar variable dependiente e independiente, uso de porcentajes y unidades de medidas)*.

Además, algunas destrezas matemáticas consideradas aquí como: *mcm y mcd de expresiones algebraicas* y *despejar en una ecuación lineal*, ya fueron mencionadas previamente, o forman parte de manera implícita de algunas otras destrezas matemáticas más generales que ya fueron consideradas. Así mismo, aunque la destreza matemática *circunferencia (sus partes analíticamente)* no se consideró previamente como una *debilidad matemática* en el reporte anterior, esta no formaría parte de las *debilidades matemáticas*, dado que esta destreza hace parte de los temas desarrollados en el curso de Precálculo I. Por otra parte, la destreza matemática *evaluar expresiones como $f(x + h)$* , fue considerada con mayor frecuencia más adelante como lo veremos, ya que, tal cual como lo argumentaron los dos docentes, quienes en esta semana reportaron esta debilidad, es parte fundamental en la generación y composición de funciones.

Durante la semana ocho hubo bastante variedad en los reportes presentados por los docentes, por lo que no se presentaron destrezas matemáticas que involucraran una mayor frecuencia de casos. Por tal motivo, se decidió esperar un reporte adicional (es decir, hasta el de la semana nueve) con el propósito de que aumente la frecuencia de algunas debilidades matemáticas que fueron mencionadas en el reporte de la semana ocho. Todo esto a raíz de que algunos docentes presentaban un desfase en la secuencia de los temas a tratar con sus estudiantes durante estas dos semanas. De acuerdo con esto, el reporte que se obtuvo durante estas dos semanas fue el siguiente:

Reporte de las semanas 8 y 9 de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Significado de imagen y preimagen	1
Propiedades de potencias y radicación en funciones	2
Significado implícito de pendiente de recta	2
Aplicaciones de desigualdades en funciones	2
Evaluar expresiones algebraicas en funciones	3
Función por partes (identificación del dominio de cada parte, y evaluación de puntos)	5
Función piso y techo	1
Jerarquía de las operaciones en las funciones	1
Proceso inverso (despejar en una ecuación)	1
Cuantificadores lógicos	1
Reflejar una función	2

Tabla 7: Semanas 8 y 9

Durante las semanas ocho y nueve se consideraron algunas destrezas matemáticas muy diferentes a las que ya se han mencionado en reportes anteriores, dado que se trabajaron nuevos conceptos matemáticos, como algunas funciones reales particulares. Las destre-

zas matemáticas que con mayor frecuencia se consideraron durante estas dos semanas fueron *función por partes (evaluar puntos y dominio de cada parte)* y *evaluar expresiones algebraicas en funciones*. De acuerdo con la primera destreza, es importante decir que a pesar de que este concepto hace parte de los temas desarrollados en el curso de Precálculo I, algunos docentes indicaron que sus estudiantes presentaron dificultades al momento de identificar cada parte en el dominio de esta función. Por lo que a muchos de sus estudiantes se les dificultó la evaluación de puntos en este tipo de funciones, trayendo consigo dificultades al momento de graficar cada parte en el plano. Por lo que se debería implementar una guía previa de refuerzo en el curso de Precálculo I.

En cuanto a la segunda destreza matemática considerada como más recurrente durante estas dos semanas, los docentes argumentaron que sus estudiantes presentaron dificultades al momento de evaluar una expresión algebraica en una función, todo esto a raíz del concepto de *funciones compuestas* que se trabajó durante esas semanas. Por lo tanto, y tal como lo habían sugerido previamente dos docentes en el anterior reporte, se debe profundizar en esta destreza matemática creando una guía previa de refuerzo, con el fin de promover bases antes de trabajar funciones compuestas con los estudiantes.

Por otra parte, algunas destrezas matemáticas como: *significado de imagen y preimagen, propiedades de potencias y radicación en funciones y aplicaciones de desigualdades en funciones*, pueden vincularse de forma implícita en las destrezas matemáticas que ya se mencionaron como más frecuentes en el reporte de estas dos semanas. Así mismo, destrezas matemáticas como: *significado implícito de pendiente de recta, proceso inverso (despejar en una ecuación)* y *cuantificadores lógicos*, son destrezas matemáticas que ya se mencionaron en reportes anteriores, o que simplemente están relacionados implícitamente con alguna destreza matemática que ya había sido considerada. Finalmente, destrezas matemáticas como *jerarquía de las operaciones en las funciones* y *reflejar una función* fueron destrezas matemáticas que intensificaron su frecuencia una semana más adelante.

Durante la semana diez se volvió a considerar la destreza matemática *solución de problemas*, la cual en esta oportunidad se consideró a raíz de algunos problemas verbales que se trabajaron bajo la modalidad de funciones lineales; sin embargo, esta destreza ya fue considerada en un reporte anterior, incluso bajo esta modalidad. Así, durante el transcurso de la semana diez se consideraron algunas otras destrezas matemáticas como las siguientes:

Reporte de la semana 10 de Precálculo I	
Destreza matemática	Frecuencia
Noción de límite de una función (asíntotas)	4
Reflejar puntos o funciones sobre eje x, y, o una recta	3
Jerarquía entre funciones (compuestas y operaciones).	3
Análisis de crecimiento o decrecimiento de función por intervalos	1
Solución de problemas	2

Tabla 8: Semana 10

Las destrezas matemáticas que con mayor frecuencia se consideraron durante esta semana fueron *noción de límite de una función (asíntotas)*, y *jerarquía entre funciones (compuestas y operaciones)*, junto a *reflejar puntos o funciones sobre eje x, y, o una recta*. Los docentes afirmaron que sus estudiantes presentaban dificultades al momento

de estudiar el comportamiento general de una función cuando su variable independiente se acerca a una asíntota horizontal o verticalmente, es decir, cuando $x \rightarrow \pm\infty$. Estos docentes afirmaron que es importante que los estudiantes entiendan este comportamiento, dado que es fundamental al momento de graficar funciones o entender el comportamiento de ellas en general.

Por otra parte, indicaron que muchos de sus estudiantes presentaron dificultades al momento de establecer la jerarquía en los procesos de evaluación para funciones compuestas u operaciones entre ellas. Ellos argumentan que los estudiantes tienden a confundir el orden en el que deben desarrollarse o efectuarse los procesos, por lo que se presentan dificultades al respecto. Por último, se volvió a considerar la destreza matemática *reflejar puntos o funciones sobre eje x, y, o una recta*. Los docentes mencionaron que muchos de sus estudiantes no comprenden el proceso de reflexión de un punto o una curva sobre un eje o recta en particular. En cuando a la destreza matemática *análisis de crecimiento o decrecimiento de función por intervalos*, podemos relacionarla directamente con la destreza de mayor frecuencia en este reporte, dado que conceptos matemáticos como el de crecimiento o decrecimiento en intervalos de una función, también nos permite estudiar el comportamiento asintótico de algunas funciones.

En conclusión, será indispensable crear guías previas de refuerzo para los estudiantes de nuevo ingreso de la UPRM para el curso de Precálculo I, en las destrezas matemáticas como *noción de límite de una función (asíntotas)*, *jerarquía entre funciones (compuestas y operaciones)* y *reflejar puntos o funciones sobre eje x, y, o una recta*.

4 Conclusiones

Después de la semana diez ya no fueron considerados más reportes, dado que muchos de los reportes después de la semana diez incluían *debilidades matemáticas* que previamente ya habían sido consideradas en reportes anteriores, o que hacían parte de los temas que serían trabajados en el curso de Precálculo I. A modo de conclusión, se presenta una tabla final donde se resumen todas las destrezas matemáticas que con mayor frecuencia fueron consideradas como *debilidades conceptuales* a lo largo de cada una de las semanas durante esta investigación:

Semana(s)	Destrezas matemáticas
1 y 2	<ul style="list-style-type: none"> • Suma y resta de fracciones (homogéneas y heterogéneas) • Descomposición de un número en sus factores primos
3	<ul style="list-style-type: none"> • Producto de expresiones algebraicas • Reconocimiento de expresiones algebraicas (más suma y resta)
4	<ul style="list-style-type: none"> • Notación de conjuntos, más operaciones entre conjuntos (intervalos) como unión e intersección • Trasposición de lenguaje natural a matemático
5	<ul style="list-style-type: none"> • Despejar y aplicar en una fórmula • Tipos de triángulos (según lados y ángulos)
6	<ul style="list-style-type: none"> • Polígonos regulares más círculo (sus partes, área y perímetro) • ¿Dónde está definida una expresión matemática?
7	<ul style="list-style-type: none"> • Problemas verbales con funciones lineales (identificar variable dependiente e independiente, uso de porcentajes y unidades de medidas)
	<ul style="list-style-type: none"> • Funciones por partes (identificación del dominio de cada parte, y

8 y 9	evaluación de puntos) <ul style="list-style-type: none"> • Evaluar expresiones algebraicas en funciones
10	<ul style="list-style-type: none"> • Noción de límite de una función (asíntotas) • Reflejar puntos o funciones sobre eje x, y, o una recta • Jerarquía entre funciones (compuestas y operaciones).

Tabla 9: Resumen general

Cada una de las destrezas matemáticas (llamadas aquí como debilidades matemáticas) que se mencionaron en cada uno de los reportes a lo largo de estas diez semanas, y que se resumen en la Tabla 9, hacen parte de conceptos bases o fundamentales que los estudiantes deberían conocer o saber antes de someterse a un curso de Precálculo I en la UPRM. Es indispensable realizar guías de apoyo que posibiliten un refuerzo previo semanal a cada uno de estos conceptos; dado que esta investigación permitió establecer un orden en ese sentido.

El poder desarrollar las guías de refuerzo de manera semanal permitiría subsanar en el momento indicado cada una de las debilidades matemáticas de los estudiantes, previo a los conceptos que se trabajarían en el desarrollo del curso de Precálculo I. Así mismo, promovería una mayor eficiencia en la aprobación del curso de Precálculo I para futuras generaciones en la UPRM. Sólo así se podría evitar que un gran porcentaje de estudiantes reprueben el curso de Precálculo I en la UPRM, y evitar de paso que muchos de estos estudiantes tomen cursos remediales, o accedan a cursos de verano, demandando para ellos gastos económicos adicionales, e invirtiendo tiempo adicional en cursos que no le garantizan la aprobación del curso de Precálculo I.

Agradecimientos

El presente trabajo se realizó gracias a la contribución de fondos del programa: “*Coronavirus Response and Relief Supplemental Appropriations Act (CRRSAA)*”

Referencias

Balderas R., Rocío G., Block S., Guerra R., & María T. (2014). "Sé cómo se hace, pero no por qué": Fortalezas y debilidades de los saberes sobre la proporcionalidad de maestros de secundaria. *Educación Matemática*, 26(2), 7-32.

Castillo Sánchez M., Gamboa Araya R, Hidalgo Mora R. (2020) Factores que influyen en la deserción y reprobación de estudiantes en un curso universitario de matemáticas, *Uniciencia*, 34 (1). 29-245.

Complete College America (2021) <https://completecollege.org/strategy/corequisite-support/>

Complete College America. (2012). Remediation: Higher education's bridge to nowhere. ERIC Clearinghouse.

Duran M. (2012) El estudio de caso en la investigación cualitativa, *Revista Nacional de Administración* 3(1), 121-134.

Mora, C. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*, 24(70), 181-272.

Morales, Y., Torres, L., & García, G. (2018). Fortalezas, oportunidades, debilidades y amenazas en un curso de geometría euclídea I en un modelo tradicional de formación de docentes. *Actas de la XII Conferencia Argentina de Educación matemática*, 38-46.

Mota, D. & Valles, R. (2015). Papel de los conocimientos previos en el aprendizaje de las matemáticas universitarias. *Acta Scientiarum. Education*, 37, 85-90.

Luis F. Cáceres (luis.caceres1@upr.edu)

Universidad de Puerto Rico en Mayagüez

Jhonnatan S. Ortega (jhonnatan.ortega@upr.edu)

Universidad de Puerto Rico en Mayagüez

...