ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 2 No. 1 (2021), pp. 16–30

Una introducción a la geometría combinatoria: problemas de divisiones justas.

Cuauhtemoc Gomez Navarro

Resumen

En este trabajo introduciremos de manera amigable las ideas geométricas que más se han utilizado para resolver teoremas tipo Ham Sandwich. Para eso, haremos énfasis en la resolución de problemas de olimpiadas de matemáticas. Además, este trabajo contiene un par de problemas de olimpiadas como ejercicios de práctica.

Palabras y frases clave: geometría combinatoria, teorema del Ham Sandwich, rotaciones y traslaciones, continuidad.

An introduction to combinatorial geometry: fair division problems.

Abstract

In this work we shall introduce the nice geometrical ideas that have been used to solve Ham Sandwich-type theorems. We shall focus on solving Math Olympics problems. In addition, this work contains a couple of Math Olympics problems as practice exercises.

Key words and phrases: combinatorial geometry, Ham Sandwich theorem, rotations and translations, continuity.

1 Introducción

La geometría combinatoria es una área matemática que ha tomado mucha fuerza en los últimos años, tanto en la investigación matemática, como en problemas de olimpiadas.

Muchos problemas de esta área matemática se caracterizan por tener soluciones que solo usan ideas sencillas, sin embargo, esto no significa que el problema sea fácil de resolver. Un ejemplo de esto es el problema 2 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) del 2011, que tiene una solución sencilla, y sin embargo, a la mayoria de los participantes de esa competencia no se les ocurrió esa idea sencilla.

Este artículo, por un lado, tiene como propósito mostrar algunas ideas sencillas que han servido para resolver algunos problemas de olimpiadas de geometría combinatoria. Por otro lado, este trabajo también tiene como propósito mostrar como esas ideas sencillas nos llevan a resultados más fuertes de geometría combinatoria (o geometría discreta).

2 Problemas de olimpiadas

Imaginemos que estamos manejando un automóvil sobre una avenida A, y que a nuestro lado izquierdo se encuentra otra avenida B. Supongamos que después de 30 minutos de manejar sobre la avenida A (en la misma dirección), nos damos cuenta que ahora la avenida B se encuentra a nuestro lado derecho. Si pensamos a las avenidas como líneas rectas en el plano, nuestra intuición nos debería decir que en un momento intermedio las dos avenidas se cruzaron, es decir, en un momento estuvimos simultáneamente sobre las dos avenidas.

Un profesor de cálculo nos diría que lo único que hicimos fue aplicar un teorema de *continuidad*, que se llama el *teorema del valor intermedio*. Por el momento no vamos a mencionar nada sobre ese teorema, ya que en la siguiente sección platicaremos sobre eso.

En esta sección empezaremos viendo las soluciones de algunos problemas de olimpiadas. La idea intuitiva para resolverlos será la misma intuición que usamos en el problema de las avenidas.

Problema 1. Sea S un conjunto finito de al menos dos puntos en el plano, y con una cantidad impar de puntos. Supongamos que no hay 3 puntos en S que sean colineales. Demuestra que para cualquier punto p de S, hay una recta que pasa por p y que deja la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados (semiplanos) definidos por esa recta.

Solución. Sea p cualquier punto de S. Nos tomamos cualquier recta l que pase por p, pero no pase por ningún otro punto de S.

Si l es una recta que deja la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que define la recta, es la recta que estamos buscando, si no podemos asignarle una dirección a la recta y considerar su lado derecho y su lado izquierdo. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el lado derecho tiene más de la mitad de puntos de S. Si empezamos a rotar la recta con centro en p al dar un giro de 180° habremos invertido los lados, así que ahora el lado derecho va tener menos puntos de S que la mitad. Como no hay 3 puntos de S sobre la recta l (o alguna de sus rotaciones), al hacer la rotación los

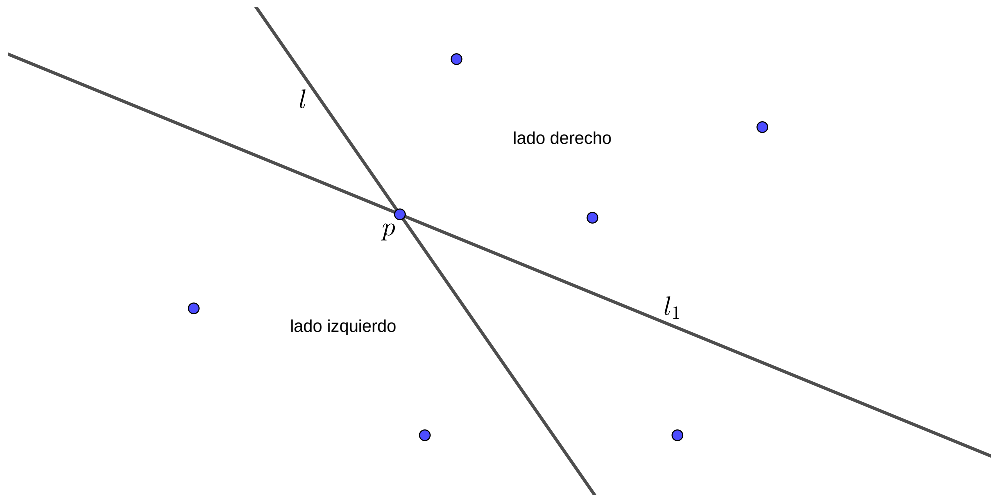

Figura 1: En este ejemplo (del problema 1), inicialmente el lado derecho de la recta l tiene más de la mitad de puntos. Entonces, antes de dar la media vuelta, llegaremos a la recta l_1, que deja la mitad de los puntos en cada uno de los lados que determina.

puntos de S van cambiando de lado uno por uno, así que antes de dar el giro de 180°, encontraremos una recta l_1 que pase por p y deje la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que determina la recta (ver figura 1). □

A continuación veremos el problema 2 de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO) del 2011, que fue propuesto por Geoff Smith.

Problema 2. Sea S un conjunto finito de al menos dos puntos en el plano. Supongamos que no hay 3 puntos en S que sean colineales. Un *remolino* es un proceso que empieza con una recta l que pasa por exactamente un punto p de S. La recta se empieza a rotar con centro en p en sentido de las manecillas del reloj, hasta que la recta se encuentre por primera vez con otro punto q de S. En ese momento, se cambia el centro de rotación al punto q y se continúa rotando la recta en sentido a las manecillas del reloj, hasta que la recta se encuentre con otro punto de S. Este proceso continúa indefinidamente. Demuestra que se puede elegir un punto p en S y una recta l que pase por p, de tal manera que el remolino que resulta usa cada punto de S como centro de rotación una infinidad de veces.

Solución. Primero tomemos cualquier recta l que cumpla que ni l ni ninguna de las rectas paralelas a l pasa por dos puntos de S. Entonces, empecemos

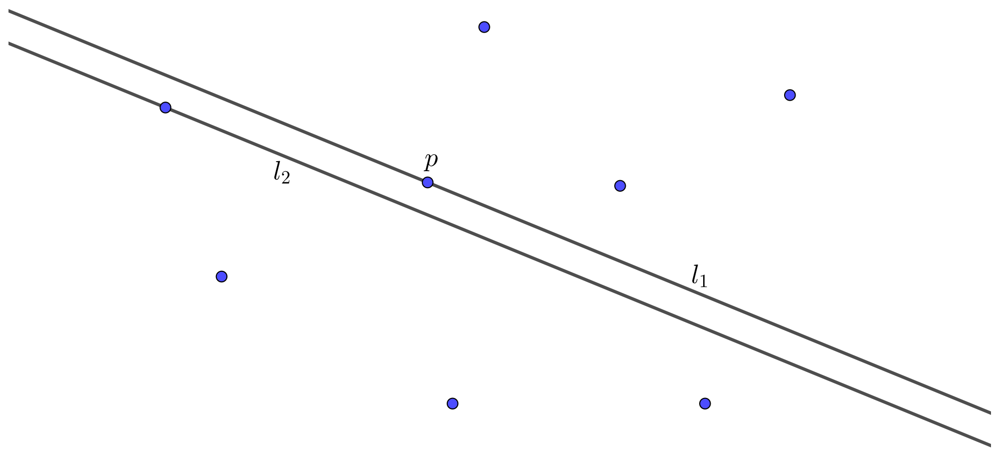

Figura 2: En este ejemplo (del problema 2) el conjunto tiene una cantidad par de puntos, por lo que las rectas l_1 y l_2 son distinas, pero no hay puntos en el espacio que dejan esas dos rectas.

a trasladar la recta l hasta llegar a una recta l_1 que pase por un punto p de S y que cumpla que la diferencia (positiva) de la cantidad de puntos de S entre los dos lados que define, es a lo más 1 (notemos que si S tiene una cantidad impar de puntos, entonces l_1 es una recta que deja la mitad de los puntos de S en cada uno de los lados que define la recta). Proponemos que si empezamos el remolino con ese punto y esa recta, obtendremos lo que queremos.

Digamos que una recta es *justa*, si cumple que la diferencia (positiva) de la cantidad de puntos de S entre los dos lados que define, es a lo más 1.

Si empezamos a rotar la recta l_1 con centro en p, es claro que la recta seguirá siendo justa hasta que llegue a otro punto de S. Cuando lleguemos a otro punto q de S y cambiemos el centro de rotación a q, uno de los lados perderá al punto q, sin embargo, inmediatamente ganará al punto p, por lo que la recta se mantendrá siendo justa.

Como la recta se mantiene justa durante todo el remolino, entonces, cuando demos un giro de 180°, llegaremos a otra recta 1_2, paralela a l_1, que cumple que en la franja entre las rectas 1_1 y 1_2 no hay ningún punto (ver figura 2). Esto significa que en el remolino, cuando pasamos de la recta 1_1 a la recta 1_2, pasamos por todos los puntos de S. Entonces, si seguimos rotando la recta, cada vez que demos un giro de 180°, pasaremos por todos los puntos de S. Por lo tanto, si empezamos el remolino con una recta justa, obtenemos el resultado.

$\square$

Decimos que un conjunto C (en el plano, en el espacio o en cualquier espacio euclidiano) es *convexo*, si para cada par de puntos x, y en C, se cumple que el segmento que tiene como extremos a x y a y, se queda contenido en C. Un conjunto convexo C lo podemos visualizar como un conjunto que no tiene hoyos.

Sea S un conjunto finito de puntos (en el plano en el espacio o en cualquier espacio euclidiano). Diremos que C es la *envolvente convexa* de S, si es el conjunto convexo más pequeño que contiene en su interior o en su frontera, a todos los puntos de S. Además, cuando un punto de S esté sobre la frontera de la envolvente convexa C, diremos que ese punto está sobre la envolvente convexa.

La definición de envolvente convexa puede llegar a ser muy útil a la hora de resolver problemas de geometría combinatoria, ya que en muchas ocasiones, los puntos sobre las envolventes convexas tienen propiedades interesantes.

El siguiente problema se resuelve usando ideas similares a las que hemos estado viendo, además, es un ejemplo de la importancia que puede llegar a tener la envolvente convexa. Fue el problema 5 de la Olimpiada de Matemáticas de los Estados Unidos (USAMO) del 2005.

Problema 3. Sea n un entero mayor que 1. Consideremos un conjunto de $2n$ puntos en el plano donde no hay 3 colineales. Supongamos que n de los puntos están coloreados de azul y los otros n puntos están coloreados de rojo. Una recta en el plano se llama *balanceada* si pasa por exactamente un punto azul y un punto rojo, y para cada lado definido por la recta, el número de puntos azules en ese lado es igual al número de puntos rojos en ese lado. Demuestra que existen al menos dos rectas balanceadas.

Solución. Observemos que la envolvente convexa del conjunto de los $2n$ puntos, contiene al menos 3 puntos sobre la envolvente convexa. Por el principio de las casillas, hay al menos 2 de esos puntos que son del mismo color, sin pérdida de generalidad, son de color azul.

Consideremos uno de los puntos azules p sobre la envolvente convexa. Sean p_1 y p_{2n-1} los dos puntos que están sobre la envolvente convexa y que son adyacentes a p. Si alguno de p_1 o p_{2n-1} es de color rojo, al unirlo con el punto azul p, obtendremos una recta balanceada. Entonces, supongamos que tanto p_1 como p_{2n-1} son azules.

Sea l_1 la recta que pasa por p y p_1. Empecemos a rotar la recta l_1 con centro en p en sentido contrario a las manecillas del reloj. Numeremos a los $2n-1$ puntos que son distintos de p, de acuerdo al orden en que la recta fue pasando por esos puntos, cuando hicimos la rotación con centro en

p. Notemos que esta numeración es compatible con las etiquetas que ya le habíamos puesto a los puntos p_1 y p_{2n-1}. Dado el orden anterior, llamemos l_i a la recta que pasa por los puntos p y p_i.

A todas las rectas l_i les asignamos una dirección: apuntando hacia el lado contrario de p. Entonces, la recta l_2 cumple que su lado derecho tiene más puntos azules que rojos; y la recta l_{2n-1} cumple que su lado derecho tiene menos puntos azules que rojos. Como no hay tres de los puntos que sean colineales, cuando hacemos la rotación con centro en p, estamos cambiando a los puntos de lado uno por uno. Por lo tanto, hay una recta l_i (con $2 \leq i \leq 2n-2$) que cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos. Además, si el punto p_i es rojo, entonces, el lado izquierdo de l_i también tiene el mismo número de puntos azules y rojos, por lo cual, l_i sería balanceada.

En otro caso, el punto p_i es azul. Entonces, la recta l_{i+1} cumple que su lado derecho tiene más puntos azules que rojos, y como ya sabemos que la recta l_{2n-1} cumple que su lado derecho tiene menos puntos azules que rojos, tenemos que existe una recta l_j (con $i+1 \leq j \leq 2n-2$) que cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos. Notemos que si desde el principio nos hubieramos tomado i como el máximo de los números que cumplen que el lado derecho de l_i tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, entonces l_j nos hubiera dado una contradicción.

El párrafo anterior nos dice que si nos tomamos i como el máximo de los números que cumplen que el lado derecho de l_i tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, entonces, l_j será una recta balanceada (ver figura 3).

Por lo tanto, para cada punto azul en la envolvente convexa hay una recta balanceada que pasa por el punto azul. Como estamos suponiendo (sin pérdida de generalidad) que hay al menos dos puntos azules, tenemos al menos dos rectas balanceadas.

$\square$

Como seguramente recordarán, en las rotaciones de las soluciones de los problemas 1 y 2, no usamos que los centros de rotación estuvieran sobre la envolvente convexa del conjunto de puntos. Esto nos podría llevar a pensar que en la solución del problema 3 podemos usar cualquier punto como centro de rotación, por lo cual tendríamos al menos n rectas balanceadas (una recta por cada punto azul o una recta por cada punto rojo). Sin embargo, no hay ninguna recta balanceada que pase por el punto p_6 de la figura 3, por lo que la solución anterior puede fallar si nos tomamos como centro de rotación cualquier punto en el interior de la envolvente convexa. Afortunadamente, sí es cierto que hay al menos n rectas balanceadas, y eso es un resultado de

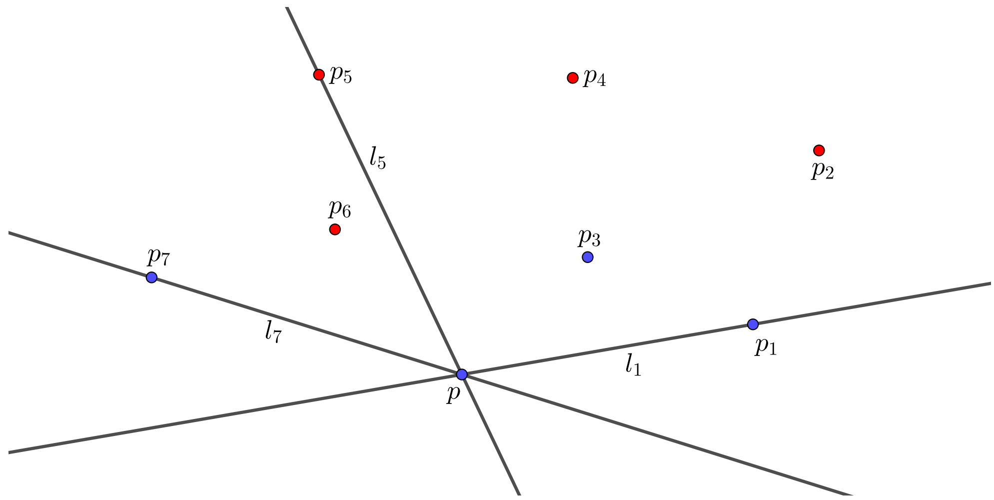

Figura 3: En este ejemplo (del problema 3) tenemos 4 puntos azules y 4 puntos rojos. Notemos que la recta l_3 cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, sin embargo, el punto p_3 es azul, por lo cual l_3 no es balanceada. La recta l_5 también cumple que su lado derecho tiene la misma cantidad de puntos azules que rojos, y como el punto p_5 sí es rojo, tenemos que l_5 sí es balanceada.

Janos Pach. Como la demostración de ese resultado es muy larga y queda fuera del propósito de este artículo, los lectores interesados pueden consultar [4].

Ahora dejaremos dos problemas de práctica (los problemas 4 y 5), para los lectores que quieran empezar a medir su intuición en problemas (tipo olimpiada) de geometría combinatoria.

El problema 4 usa ideas similares a las que hemos estado viendo, aunque no es exactamente la misma idea de los problemas anteriores.

El problema 5 fue el problema 3 del Concurso Nacional de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas (OMM) del 2019, y fue propuesto por Víctor Domínguez Silva. Aunque la solución más natural para resolver este problema no usa las ideas que hemos estado viendo, durante el Concurso Nacional uno de los participantes usó la idea del problema 2, y otro de los participantes usó la idea del problema 3. Por esta razón, lo dejamos como un problema de práctica.

Problema 4. Considera n rectas en el plano tal que no hay 3 que pasen por un mismo punto. Definamos una gráfica donde los vértices son las intersecciones de las rectas, y dos vértices están conectados por una aristas (son vecinos en la gráfica) si y solo si son consecutivos en una misma recta. Demuestra que los vértices de esa gráfica se pueden colorear con 3 colores, de tal manera que no hay dos vértices vecinos del mismo color.

Problema 5. Sea $n \geq 2$ un entero. Considera $2n$ puntos alrededor de una circunferencia. Cada vértice ha sido etiquetado con un entero del 1 al n, inclusive, y cada uno de estos enteros ha sido usado exactamente 2 veces. Isabel divide los puntos en n parejas y traza los n segmentos entre dichas parejas, con la condición de que estos no se intersecan. Luego, a cada segmento le asigna el número mayor entre las dos etiquetas en sus extremos.

a) Muestre que, sin importar cómo se hayan etiquetado los puntos, Isabel puede escoger las parejas de tal forma que se usen exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números para etiquetar a los segmentos.

b) ¿Pueden etiquetarse los puntos de tal forma que, sin importar cómo Isabel divida los puntos en parejas, siempre se usen exactamente $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ números para etiquetar los segmentos?

3 El teorema del Ham Sandwich

El problema 1 de la sección anterior nos motiva a preguntarnos si, dados dos conjuntos finitos de puntos S_1 y S_2 (ajenos) en el plano, existe una recta l que cumpla que cada uno de los semiplanos (lados) definidos por l contiene a la mitad de los puntos de S_1 y a la mitad de los puntos de S_2.

Dado un conjunto S de puntos en el plano, decimos que una recta l *biseca* el conjunto S, si l pasa por a lo más 1 punto de S, y los dos semiplanos (lados) definidos por l continen la misma cantidad de puntos de S.

El siguiente teorema es la versión discreta en el plano de un teorema conocido como el *teorema del Ham Sandwich*.

Teorema 1. *Consideremos m puntos azules y n puntos rojos en el plano, de tal manera que no hay 3 puntos (azules o rojos) que sean colineales. Entonces, existe una recta que biseca simultáneamente los dos conjuntos de colores.*

Demostración. Para demostrar este teorema, primero supongamos que alguno de m o n es impar, sin pérdida de generalidad, m es impar.

Por el problema 1, podemos encontrar una recta l_1 que pasa por un punto p azul y que biseca los puntos azules. Empecemos a rotar la recta l_1 en sentido

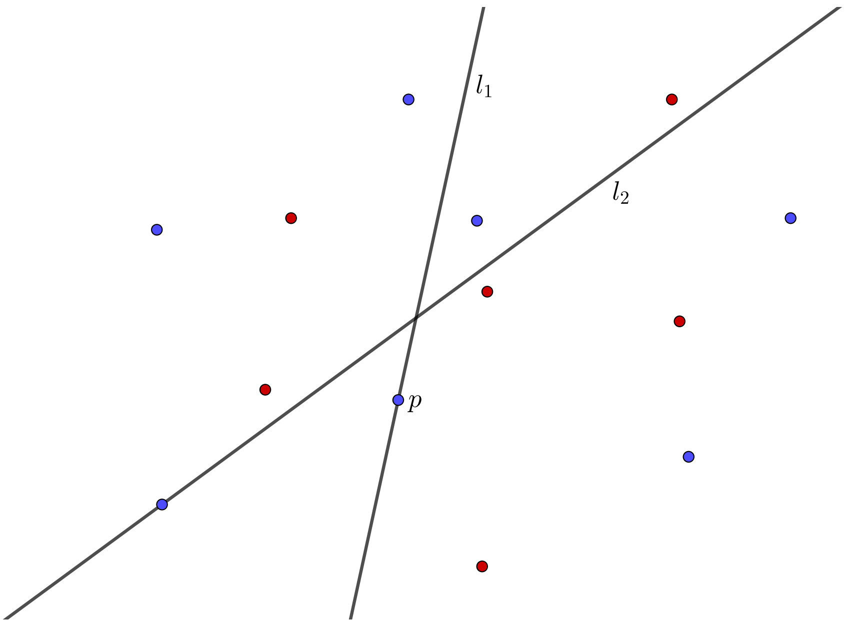

Figura 4: En este ejemplo, la recta l_1 pasa por el punto p azul y biseca el conjunto de puntos azules, sin embargo, no biseca el conjunto de puntos rojos. Cuando hacemos las rotaciones (del problema 2), antes de dar la media vuelta, llegaremos a la recta l_2, que biseca ambos conjuntos de colores.

de las manecillas del reloj con centro en p, hasta intersecar a otro punto azul q, en ese momento cambiemos el centro de rotación a q y sigamos rotando la recta. Continuemos rotando la recta de esa manera, cambiando el centro de rotación cada vez que toquemos otro punto azul. De acuerdo al problema 2, obtenemos rectas que siempre van a bisecar el conjunto de puntos azules, y como m es impar, al dar un giro de 180° tenemos que regresar a la misma recta l_1 pero en sentido contrario. Por el mismo argumento de la solución del problema 1, al hacer estas rotaciones, antes de dar un giro de 180° tendremos una recta l_2 que también biseque los puntos rojos, por lo tanto, esa recta biseca ambos conjuntos (ver figura 4).

Si ambos números m, n son pares, podemos considerar un punto q (que no sea azul ni rojo), agregar el punto q al conjunto de puntos azules y aplicar las rotaciones anteriores a ese nuevo conjunto. Por el mismo argumento, llegaremos a una recta que biseque el conjunto de puntos rojos, además, si la recta pasa por el punto q también bisecará el conjunto de puntos azules. Si la recta no pasa por q significa que pasa por algún punto azul y alguno de los lados tendrá un punto azul más que el otro, pero como hay una cantidad finita de puntos, podemos trasladar un poco la recta para pasar ese punto azul al lado correspondiente, sin afectar los puntos rojos, así tendremos la recta buscada.

□

Ya hemos trabajado con rectas que bisecan conjuntos finitos de puntos. Una pregunta muy natural es preguntarse si también existen rectas que bisecan el área de polígonos en el plano. Antes de responder esta pregunta, precisemos a qué nos referimos cuando decimos polígonos en el plano.

Un polígono en el plano, es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en el plano, que cumplen que no hay 3 de esos puntos que sean colineales. Además, diremos que una recta *biseca* el área de un polígono, si la recta parte al polígono en dos polígonos con la misma área.

Entonces, en este momento no deberíamos tener ningún problema para intuir que, dado un polígono en el plano, hay una recta que biseca el área del polígono. En efecto, dado un polígono P, tomemos cualquier recta l y traslademos la recta hasta llegar a una recta l_1, paralela a l, que biseca el área de P.

Motivados por el teorema 1, ahora nos gustaría saber si, dados dos polígonos en el plano, existe una recta que biseca simultáneamente el área de ambos polígonos.

Notemos que cuando vimos que siempre existe una recta que biseca el área de un polígono P, nos tomamos una recta l cualquiera y encontramos una recta l_1, paralela a l, que biseca el área de P. Esto nos lleva a pensar que, dado un polígono P, hay muchas rectas que bisecan el área de P.

Para precisar lo anterior, definamos a la esfera en el plano. Decimos que el conjunto de puntos que tienen distancia 1 al origen, es la esfera en el plano, que es denotada como $\mathbb{S}^1$. Dado un punto u en la esfera $\mathbb{S}^1$, denotemos como l_u al segmento que une a u con el origen.

Consideremos dos polígonos P y Q en el plano. Entonces, para cada punto u en la esfera $\mathbb{S}^1$, podemos considerar a las rectas perpendiculares a l_u, y encontrar una recta m_u, perpendicular a l_u, que biseca el área de P (ver figura 5).

Siguiendo la misma estrategia de los problemas 1 y 2 de la sección anterior, queremos empezar a mover gradualmente todas esas rectas que bisecan el área de P. Empecemos con cualquier punto u en la esfera $\mathbb{S}^1$. Asignemos un dirección a la recta m_u que biseca el área de P, y consideremos su lado derecho y su lado izquierdo.

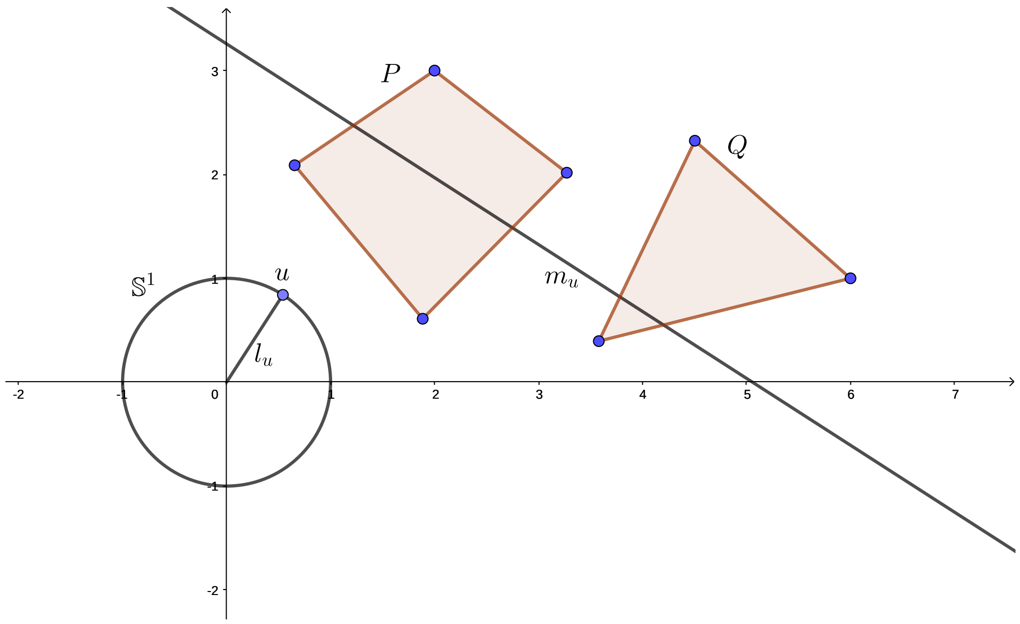

Figura 5: En este ejemplo, la recta m_u es perpendicular a la recta l_u y biseca el área del polígono P.

Si el lado derecho de m_u tiene la mitad del área de Q, entonces, m_u es una recta que biseca el área de los dos polígonos. En caso contrario, supongamos (sin pérdida de generalidad) que el lado derecho de m_u tiene más de la mitad del área de Q. Empecemos a mover gradualmente el punto u en la esfera, entonces, la intuición nos dice que la recta m_u también se mueve gradualmente, por lo que el área de Q que se quedó del lado derecho de m_u también cambia gradualmente. Cuando lleguemos al punto $-u$ (el único punto sobre la esfera $\mathbb{S}^1$ que cumple que $u, -u$ y el origen son colineales), la recta m_{-u} será la misma recta que la recta m_u, pero tendrá orientación contraria; por lo que ahora el lado derecho de m_{-u} tendrá menos de la mitad del área de Q. Entonces, nuestra intuición nos dice que en un momento intermedio, existió un punto v en la esfera $\mathbb{S}^1$, tal que la recta m_v también biseca el área de Q. Por lo tanto, la recta m_v biseca simultáneamente el área de ambos polígonos.

Puede que algunos de los lectores no hayan quedado satisfechos con la demostración anterior, ya que solo usamos nuestra intuición. Por esta razón, enunciaremos los resultados que formalizan la demostración anterior.

Dijimos que cuando movemos gradualmente los puntos en la esfera, el área de Q que se quedó del lado derecho de la recta m_u también se mueve gradualmente. En las clases de Cálculo diríamos que tenemos una función continua en la esfera $\mathbb{S}^1$, donde a cada elemento u de la esfera, le asignamos el área de Q que se queda del lado derecho (semiplano positivo) de m_u.

La demostración de que esta función es continua es muy técnica y queda fuera del propósito de este artículo, por lo que en el resto del trabajo vamos a suponer que la función es continua (que intuitivamente ya habíamos visto que sí es cierto). Aunque no es necesario para continuar con la lectura de este trabajo, las personas con conocimientos en Cálculo, pueden asegurarse que esta función es continua, usando el *teorema de la convergencia dominada de Lebesgue* (que puede ser consultado en la sección 1.4 de [2]).

Después, nos fijamos en un punto u tal que el lado derecho (semiplano positivo) de m_u tiene más de la mitad del área de Q. Usando la función que acabamos de definir, esto significa que la función manda a u a un número mayor que $\frac{area(Q)}{2}$. También observamos que cuando llegamos al punto $-u$, el lado derecho (semiplano positivo) de m_{-u} tiene menos de la mitad del área de Q. De nuevo, usando la función anterior, tenemos que la función manda a $-u$ a un número menor que $\frac{area(Q)}{2}$. Finalmente, vimos que eso implicaba (intuitivamente), que hay un punto v tal que el área de Q que se queda del lado derecho (semiplano positivo) de m_v es la mitad del área de Q. En otras palabras, la función manda a v al número $\frac{area(Q)}{2}$, con lo que obtenemos la recta que biseca simultáneamente los dos polígonos.

El *teorema del valor intermedio* es un resultado que nos garantiza que todas las funciones continuas en el plano que tienen a a y a b en su imagen, con $a < b$, cumplen que para toda c en el intervalo $[a, b]$, el número c también está en su imagen. Por lo que este teorema formaliza la demostración que acabamos de ver.

La discusión anterior nos lleva al siguiente resultado, que es la versión continua en el plano del *teorema del Ham Sandwich*.

Teorema 2. *Dados dos polígonos en el plano, existe una recta que biseca simultáneamente el área de ambos polígonos.*

El teorema 2 también es válido para dimensiones más grandes, que realmente ese es el teorema al que se le conoce como el teorema del Ham Sandwich. Antes de ver ese teorema, veamos una definición análoga a la de polígono, para dimensiones arbitrarias.

Decimos que un conjunto C en el espacio euclideano $\mathbb{R}^d$ es un *politopo convexo*, si es la envolvente convexa de un número finito de puntos en $\mathbb{R}^d$.

Recordemos que en la demostración del teorema 2, usamos el teorema del valor intermedio. Para generalizar el teorema 2 a dimensiones arbitrarias usaremos la misma idea geométrica, solo que ahora necesitaremos herramientas más fuertes de continuidad. Decimos que el conjunto de puntos en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^d$ que están a distancia 1 del origen, es la esfera de dimensión d, y es denotada como $\mathbb{S}^d$.

Consideremos d politopos convexos $C_1, C_2, ..., C_d$ en $\mathbb{R}^d$. Para cada u en la esfera $\mathbb{S}^d$, asignemos a u el único hiperplano m_u ortogonal a l_u (la línea que conecta a u con el origen), que biseca el volumen de C_1. Para cada politopo convexo C_i (con $i = 2, ..., d$), consideremos una función f_i que a cada elemento u en la esfera $\mathbb{S}^d$, lo mande al volumen de C_i que se queda en el semiespacio positivo (el lado derecho) de m_u menos $\frac{volumen(C_i)}{2}$.

De nuevo, usando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, podemos demostrar que cada una de las funciones f_i son continuas. Por lo cual, si movemos continuamente los puntos en la esfera $\mathbb{S}^d$, el volumen de C_i que se queda en el semiespacio positivo (lado derecho) de m_u también se mueve continuamente.

El *teorema de Borsuk Ulam* es un teorema topológico de continuidad, que nos da las dimensiones adecuadas, para poder asegurar que todas las funciones f_i tengan un cero en común (puede ser consultado en la sección 2.1 de [2]). Por lo tanto, hay un hiperplano que biseca simultáneamente el volumen de los d politopos convexos.

Entonces, el teorema general del teorema del Ham Sandwich, que fue demostrado por primera vez por Stone y Tukey [6], nos dice lo siguiente.

Teorema 3. *Dados d politopos convexos en $\mathbb{R}^d$, existe un hiperplano que biseca simultáneamente el volumen de los d politopos convexos.*

De hecho, el teorema del Ham Sandwich nos dice algo más general. El teorema del Ham Sandwich nos dice que, dadas *d medidas finitas de Borel* (con la hipótesis adicional de que todo hiperplano tiene medida cero en cada una de las medidas), existe un hiperplano que biseca simultáneamente las *d medidas*. En este trabajo no nos interesa definir a las medidas finitas de Borel, es suficiente con saber que esa definición generaliza la noción que tenemos de longitud, área y volumen.

Lo más probable es que hasta este momento, el lector se siga preguntado por qué el teorema se llama el teorema del Ham Sandwich. A continuación veremos el ejemplo (en el espacio de dimensión tres) que motiva el nombre del teorema, además, ese ejemplo nos puede acercar más a la definición de *medida*. Imaginemos que tenemos un sándwich con tres ingredientes: pan, jamón y queso. Supongamos que queremos compartir ese sándwich con un amigo. El teorema del Ham Sandwich nos dice que siempre es posible cortar el sándwich con un cuchillo, de tal manera que a los dos nos toque la mitad de cada uno de los tres ingredientes. Cuando cortamos el sándwich con el cuchillo, estamos dividiendo el sándwich en los dos semiespacios (lados) definidos por un hiperplano en el espacio euclidiano de dimensión 3. Entonces, a cada uno de esos dos semiespacios (lados), les toca la mitad de la medida de cada uno de los 3 ingredientes (recordemos que en el teorema 3, cuando $d = 3$, a los semiespacios (lados) les toca la mitad del volumen de cada uno de 3 politopos convexos).

4 Conclusiones y comentarios finales

Como vimos a lo largo de este artículo, una idea geométrica sencilla nos llevó a resultados muy interesantes de geometría discreta. De hecho, hay muchos teoremas tipo Ham Sandwich que generalizan los teoremas vistos en este artículo, y que siguen usando la misma idea geométrica.

Por ejemplo, Soberón [5], Karasev, Hubard, Aronov [3], Blagojevic y Ziegler [1], demostraron un teorema que generaliza el teorema del Ham Sandwich, y la solución geométrica de ese teorema es muy similar a la idea que vimos en este trabajo, la diferencia es que para concluir sus resultados de continuidad, usan herramientas muy fuertes de topología algebraica (que hacen el trabajo análogo al del teorema del valor intermedio y el teorema de Borsuk Ulam). Para una continuación amigable de los temas vistos en este artículo, se puede consultar [2].

Referencias

[1] Blagojevic, P.V.M.; Ziegler, G.M., *Convex equipartitions via equivariant obstruction theory*, Israel Journal of Mathematics, 200:49-77, 2014.

[2] Gomez-Navarro, C.; *Teoremas de equipartición: una generalización del teorema del Ham Sandwich*, Tesis UNAM, 2020.

[3] Karasev, R.; Hubard, A.; Aronov, B., *Convex equipartitions: The spicy chicken theorem*, Geometriae Dedicata, 170:263-279, 2014.

[4] Pach, J.; Pinchasi, R., *On the Number of Balanced Lines*, Discrete and Computational Geometry 25:611-628 (2001).

[5] Soberón, P., *Balanced convex partitions of measures in* $\mathbb{R}^d$, Mathematika 58(1), 71-76, 2012.

[6] Stone, A.H.; Tukey, J.W., *Generalized sandwich theorems*, Duke Math. J.9 (1942).

Cuauhtemoc Gomez Navarro (cgn@ciencias.unam.mx)
Facultad de Ciencias, UNAM. México