ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 2 No. 1(2021), pp. 31–45

Relações Bidimensionais e os Números Híbridos da Sequência de Lucas

Milena C. Mangueira[1], Renata P. Vieira,
Francisco R. Alves, Paula M. Catarino

Resumo

Neste artigo, apresentamos as relações bidimensionais da sequência de Lucas, uma sequência semelhante à sequência de Fibonacci, diferindo apenas em relação aos seus valores iniciais. Diante disso, oriundo do processo de hibridação de seqüências lineares e recursivas, lidamos com os números híbridos de Lucas. Esses dois métodos discutidos nesta pesquisa apóiam a área de complexificação dessa sequência, inserindo unidades imaginárias em seus termos e em sua recorrência original. Finalmente, sugere-se um trabalho futuro para continuar esse processo, listando futuras aplicações na vida cotidiana e nas áreas da física moderna.

Palavras e frases-chave: Sequência de Lucas. Relação Bidimensional. Números Híbridos.

Two-dimensional Relations and the Hybrid Numbers of Lucas Sequence

Abstract

In this paper we present the two-dimensional relationships of the Lucas sequence, a sequence similar to the Fibonacci sequence, differing only in relation to their initial values. Given this, originating from the process of hybridization of linear and recursive sequences, we deal with the hybrid numbers of Lucas. These two methods discussed in this research support the complexification area of this sequence by inserting imaginary units into its terms and its original recurrence. Finally, future work is suggested to continue this process, listing future applications in everyday life and in areas of modern physics.

Key words and phrases: Lucas sequence. Two-dimensional Relationship. Hybrid Numbers.

1 Introdução

Os números de Fibonacci foram criados a partir do problema da reprodução de pares de coelhos imortais, desenvolvido por Leonardo Pisano de acordo com [7, 10]. A sua fórmula de recorrência é dada por $F(n) = F(n-1)+F(n-2)$ com

[1]Bolsista pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, Mestranda no Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará - IFCE

$n \in \mathbb{N}$ e $F(0) = 0, F(1) = 1$, sendo portanto uma relação unidimensional. Assim, temos que os seus primeiros termos são dados por: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Segundo [2], a partir de viagens realizadas na Europa, Fibonacci somou experiência nas áreas da aritmética e álgebra, desenvolvendo vários trabalhos. Porém, Leonardo de Pisa é lembrado geralmente em razão do seu problema que descreve "a reprodução dos coelhos imortais".

Seguindo esse estudo, o matemático francês Lucas (1842-1891), começou a estudar sobre as obras de Leonardo Pisano, criando assim outra sequência linear e recorrente, de segunda ordem, porém alterando os valores iniciais, denominando-a como sequência de Lucas segundo [5, 13, 1]. Temos portanto a sua fórmula de recorrência, dada por: $L(n) = L(n-1) + L(n-2)$ com $n \in \mathbb{N}$ e $L(0) = 2, L(1) = 1$, descrevendo assim os primeiros termos como: $2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, \ldots$

Assim, é possível ainda estabelecer fórmulas em que seja possível relacionar essas duas sequências através de equações matemática, logo:

$$L(n+1) = F(n+3) - F(n-1)$$

Para provar a veracidade dessa relação, basta substitui por números de Lucas e Fibonacci, respectivamente, obtendo os termos para a fórmula acima.

Com base nisso, serão estudados os números de Lucas, relacionando-os com a sequência de Fibonacci, bem como o seu processo de complexificação. Esse processo de complexificação de sequências, são dados a partir da inclusão de unidades imaginárias, a começar da unidade i. Assim, como realizado em [8] e [14], em que realizam o estudo das relações bidimensionais de duas sequências lineares e recorrentes, neste trabalho também será utilizado o mesmo procedimento.

Por fim, a partir do conjunto dos Números Híbridos, apresentado por [9], pode-se realizar a hibridização da sequência de Lucas. Um número híbrido é um conjunto de três sistemas numéricos juntos, sejam eles: os números complexos, hiperbólicos e duais estandos combinados um com outro.

Definição 1. *Um número híbrido é definido por [9]:*

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

E ainda, pode-se efetuar algumas propriedades e operações com os números híbridos, como: igualdade, soma, subtração e multiplição por escalar. E ainda pode-se apresentar a tabela da multiplicação de um número híbrido, como mostra a Tabela 1.

Por conseguinte, temos o conjugado de um número híbrido $z = a + bi + c\varepsilon + dh$, denotado por $\overline{z}$, é definido como

$$\overline{z} = a - bi - c\varepsilon - dh$$

e o número real

$$C(z) = z\overline{z} = \overline{z}z = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$$

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1-h$	$\varepsilon+i$
ε	ε	$1+h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon-i$	ε	1

Tabela 1: Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$.

é chamado de caráter do número híbrido, onde a raiz desse número real será a norma do número híbrido z, assim temos que: $\|z\| = \sqrt{| C(z) |}$.

Nas seções seguintes serão estudadas as relações recorrentes bidimensionais da sequência de Lucas, assim como os seus números híbridos, tratando assim do processo de complexificação.

2 Relações recorrentes bidimensionais de Lucas

Segundo [6], podemos explorar alguns números denotados por $G(n,m)$ representamos os inteiros gaussianos $(n,m) = n + mi$, em que n e m são inteiros. Assim, para verificar esse processo de complexificação da sequência de Lucas, temos as relações recorrentes do caso bidimensional desta sequência sendo explicadas no decorrer deste artigo.

A seguir, serão discutidas, algumas propriedades referentes às relações bidimensionais originadas da fórmula de recorrência da sequência de Lucas ($L(n+1) = L(n) + L(n-1)$).

Definição 2. *Os números descritos na forma $L(n,m)$ serão representados pelos números da sequência de Lucas bidimensional, satisfazendo assim as suas respectivas condições bidimensionais de recorrência, em que $n, m \in \mathbb{N}$:*

$$\begin{cases} L(n+1,m) & = L(n,m) + L(n-1,m) \\ L(n,m+1) & = L(n,m) + L(n,m-1) \end{cases}$$

Apresentando os valores iniciais definidos como: $L(0,0) = 2, L(1,0) = 1, L(0,1) = 1 + i, L(1,1) = 3 + i$ em que $i^2 = -1$ e $L(0) = 2, L(1) = 1$.

Lema 1. *Valem as seguintes propriedades:*
(i) $L(n,0) = L(n)$,
(ii) $L(0,m) = L(m) + F(m)i$,
(iii) $L(n,1) = L(n+1) + F(n+1)i$,
(iv) $L(1,m) = L(m+1) + F(m)i$.

Demonstração. De acordo com $L(n+1,m) = L(n,m) + L(n-1,m)$ e os valores iniciais $L(0,0) = 2, L(1,0) = 1$ e aplicando o segundo princípio da indução finita sobre n, onde fixa $m = 0$ e varia $n = 0, 1, 2, \ldots$. Observe:

$$\begin{aligned}
L(n+1,0) &= L(n,0) + L(n-1,0) : \\
L(2,0) &= L(1,0) + L(0,0) = 3 = L(2); \\
L(3,0) &= L(2,0) + L(1,0) = 4 = L(3); \\
L(4,0) &= L(3,0) + L(2,0) = 7 = L(4); \\
&\vdots \\
L(n-1,0) &= L(n-2,0) + L(n-3,0) = L(n-1); \\
L(n,0) &= L(n-1,0) + L(n-2,0) = L(n); \\
L(n+1,0) &= L(n,0) + L(n-1,0) \\
&= L(n-1) + L(n) = L(n+1).
\end{aligned}$$

Desse modo, verifica-se que vale a propriedade $L(n,0) = L(n)$.

De modo análogo, pode-se provar a validade $L(0,m) = L(m) + F(m)i$, considerando a relação $L(n,m+1) = L(n,m) + L(n,m-1)$ verificando ainda a relação da sequência de Lucas com a sequência de Fibonacci, sendo ainda os números iniciais de Fibonacci $F(0) = 0, F(1) = F(2) = 1$.

Analisando a recursividade para $n = 0$ e variando $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Percebe-se que:

$$\begin{aligned}
L(0,m+1) &= L(0,m) + L(0,m-1) : \\
L(0,2) &= L(0,1) + L(0,0) = 3 + i = L(2) + F(2)i; \\
L(0,3) &= L(0,2) + L(0,1) = 4 + 2i = L(3) + F(3)i; \\
L(0,4) &= L(0,3) + L(0,2) = 7 + 3i = L(4) + F(4)i; \\
&\vdots \\
L(0,m-1) &= L(0,m-2) + L(0,m-3) = L(m-1) + F(m-1)i; \\
L(0,m) &= L(0,m-1) + L(0,m-2) = L(m) + F(m)i; \\
L(0,m+1) &= L(0,m) + L(0,m-1) \\
&= L(m) + F(m)i + L(m-1) + F(m-1)i = L(m+1) + F(m+1)i.
\end{aligned}$$

Validando a propriedade $L(0,m) = L(m) + F(m)i$.

Para demonstrar a propriedade seguinte, utiliza-se o mesmo princípio da indução, com: $L(n+1,m) = L(n,m) + L(n-1,m)$ e com os valores iniciais estabelecidos no início. Além disso, verifica-se uma relação entre a sequência de Lucas e a sequência de Fibonacci, assim, fixando $m = 1$ e variando $n =$

$0, 1, 2, 3, \ldots$, segue que:

$$\begin{aligned}
L(n+1,1) &= L(n,1) + L(n-1,1):\\
L(2,1) &= L(1,1) + L(0,1) = 4 + 2i = L(3) + F(3)i;\\
L(3,1) &= L(2,1) + Le(1,1) = 7 + 3i = L(4) + F(4)i;\\
L(4,1) &= L(3,1) + L(2,1) = 11 + 5i = L(5) + F(5)i;\\
&\vdots\\
L(n-1,1) &= L(n-2,1) + L(n-3,1) = L(n) + F(n)i;\\
L(n,1) &= L(n-1,1) + L(n-2,1) = L(n+1) + F(n+1)i;\\
L(n+1,1) &= L(n,1) + L(n-1,1)\\
&= L(n+1) + F(n+1)i + L(n) + F(n)i\\
&= L(n+2) + F(n+2)i.
\end{aligned}$$

Provando que $L(n,1) = L(n+1) + F(n+1)i$.

Finalizando as demonstrações das propriedades, tem-se que de modo análogo, pode-se considerar a relação $L(n,m) = L(n,m-1) + L(n,m-2)$ e os valores estabelecidos inicialmente e, fixando $n = 1$ e variando $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Nota-se que:

$$\begin{aligned}
L(1,m+1) &= L(1,m) + L(1,m-1):\\
L(1,2) &= L(1,1) + L(1,0) = 4 + i = L(3) + F(2)i;\\
L(1,3) &= L(1,2) + L(1,1) = 7 + 2i = L(4) + F(3)i;\\
L(1,4) &= L(1,3) + L(1,2) = 11 + 3i = L(5) + F(4)i;\\
&\vdots\\
L(1,m-1) &= L(1,m-2) + L(1,m-3) = L(m) + F(m-1)i;\\
L(1,m) &= L(1,m-1) + L(1,m-1) = L(m+1) + F(m)i;\\
L(1,m+1) &= L(1,m) + L(1,m-1)\\
&= L(m+1) + F(m)i + L(m) + F(m-1)i = L(m+2) + F(m+1)i.
\end{aligned}$$

□

Teorema 1. *Para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $L(n,m)$ são descritos por:*

$$L(n,m) = L(n+m) + F(m)F(n+1)i.$$

Demonstração. Fixando o valor do número natural n, pode-se realizar a demonstração através de indução sobre m. Para o valor de $m = 0$, existe a propriedade $L(n,0) = L(n)$ e $L(n,1) = L(n+1) + F(n+1)i$, validadas anteriormente pelo Lema 1, onde $L(0) = 2, L(1) = 1$, cujos valores iniciais são $L(0,0) = 2, L(1,0) = 1, L(0,1) = 1 + i, L(1,1) = 3 + i$. Para isso, serão calculados alguns valores de $L(n,m)$, variando m.

Para $L(n,2)$, utiliza-se a recorrência $L(n,m) = L(n,m-1) + L(n,m-2)$ com os valores iniciais estabelecidos, com $m = 2$ fixo e $n = 0,1,2,3,\ldots$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
L(n+1,2) &= L(n1,2) + L(n-1,2):\\
L(2,2) &= L(1,2) + L(0,2) = 7 + 2i = L(4) + F(3)i;\\
L(3,2) &= L(2,2) + L(1,2) = 11 + 3i = L(5) + F(4)i;\\
L(4,2) &= L(3,2) + L(2,2) = 28 + 5i = L(6) + F(5)i;\\
&\vdots\\
L(n-1,2) &= L(n-2,2) + L(n-3,2) = L(n+1) + F(n)i;\\
L(n,2) &= L(n-1,2) + L(n-2,2) = L(n+2) + F(n+1)i;\\
L(n+1,2) &= L(n,2) + L(n-1,2)\\
&= L(n+2) + F(n+1)i + L(n+1) + F(n)i\\
&= L(n+3) + F(n+2)i.
\end{aligned}$$

Fixando o valor de $m = 3$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
L(n+1,3) &= L(n,3) + L(n-1,3):\\
L(2,3) &= L(1,3) + L(0,3) = 11 + 4i = L(5) + 2F(3)i;\\
L(3,3) &= L(2,3) + L(1,3) = 18 + 6i = L(6) + 2F(4)i;\\
L(4,3) &= L(3,3) + L(2,3) = 29 + 10i = L(7) + 2F(5)i;\\
&\vdots\\
L(n-1,3) &= L(n-2,3) + L(n-3,3) = L(n+2) + 2F(n)i;\\
L(n,3) &= L(n-1,3) + L(n-2,3) = L(n+3) + 2F(n+1)i;\\
L(n+1,3) &= L(n,3) + L(n-1,3)\\
&= L(n+3) + 2F(n+1)i + L(n+2) + 2F(n)i\\
&= L(n+4) + 2F(n+2)i.
\end{aligned}$$

Reescrevendo as propriedades vistas no lema anterior (i) e (ii), tem-se que:

$$\begin{aligned}
L(n,0) &= L(n) + F(0)F(n+1)i;\\
L(n,1) &= L(n+1) + F(1)F(n+1)i;
\end{aligned}$$

Contudo, supondo para $m = 1,2,\ldots,k$, sejam válidas as seguintes identidades descritas:

$$\begin{aligned}
L(n,0) &= L(n) + F(0)F(n+1)i;\\
L(n,1) &= L(n+1) + F(1)F(n+1)i;\\
L(n,2) &= L(n+2) + F(2)F(n+1)i;\\
L(n,3) &= L(n+3) + F(3)F(n+1)i;\\
&\vdots\\
L(n,k-2) &= L(n+k-2) + F(k-2)F(n+1)i;\\
L(n,k-1) &= L(n+k-1) + F(k-1)F(n+1)i;\\
L(n,k) &= L(n+k) + F(k)F(n+1)i.
\end{aligned}$$

Demonstrando para $m = k+1$, a partir da recorrência $L(n,k+1) = L(n,k) + L(n,k-1)$, tem-se que:

$$\begin{aligned}
L(n,k+1) &= L(n,k) + L(n,k-1)\\
&= L(n+k) + F(k)F(n+1)i + L(n+k-1) + F(k-1)F(n+1)i\\
&= L(n+k+1) + F(k+1)F(n+1)i.
\end{aligned}$$

□

Podemos ainda reescrever essa relação, utilizando a fórmula $L(n) = F(n+3) - F(n-1)$. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
L(n,m) &= L(n+m) + F(m)F(n+1)i\\
&= F(n+m+3) - F(n+m-1) + F(m)F(n+1)i
\end{aligned}$$

3 Relações bidimensionais de Lucas para o campo dos números inteiros não positivos

Realizando uma extensão dessa sequência para o campo dos números inteiros, temos que os seus primeiros termos negativos são mostrados na Tabela 2:

L_{-10}	L_{-9}	L_{-8}	L_{-7}	L_{-6}	L_{-5}	L_{-4}	L_{-3}	L_{-2}	L_{-1}	L_0
123	-76	47	-29	18	-11	7	-4	3	-1	2

Tabela 2: Termos negativos de Lucas.

Para os números negativos de Fibonacci, temos (ver Tabela 3):

F_{-10}	F_{-9}	F_{-8}	F_{-7}	F_{-6}	F_{-5}	F_{-4}	F_{-3}	F_{-2}	F_{-1}	F_0
-55	34	-21	13	-8	5	-3	2	-1	1	0

Tabela 3: Termos negativos de Fibonacci.

Diante disso e da relação bidimensional para os termos positivos vista na seção anterior, podemos estabelecer a relação bidimensional para os termos negativos da sequência de Lucas.

Teorema 2. *Para os dois inteiros, $n, m \in \mathbb{N}$, os números na forma $L(-n,-m)$ são descritos por:*

$$L(-n,-m) = (-1)^{n+m}[L(n+m) + F(m)F(n-1)i].$$

Demonstração. Utilizando a relação $L(n,m) = L(n+m) + F(m)F(n+1)i$ e realizando a extensão para os índices inteiros não positivos, tem-se que:

$$\begin{aligned}
L(-n,-m) &= L(-n-m) + F(-m)F(-n+1)i \\
&= L(-(n+m)) + F(-m)F(-(n-1))i \\
&= (-1)^{n+m}L(n+m) + (-1)^{m}F(m)(-1)^{n}F(n-1)i \\
&= (-1)^{n+m}L(n+m) + (-1)^{n+m}F(m)F(n-1)i \\
&= (-1)^{n+m}[L(n+m) + F(m)F(n-1)i]
\end{aligned}$$

□

4 Números híbridos de Lucas

Motivado pelos trabalhos de hibridização de sequências lineares e recorrentes realizados por [3, 4, 11, 12] nesta seção serão definidos os números híbridos de Lucas. Serão realizado investigações inretentes a esse processo desses novos números encontrando a sua recorrência, equação característica, norma, forma matricial, função geradora e fórmula de Binet.

Definição 3. *O número híbrido de Lucas será definido como:*

$$HL_n = L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}h$$

Com os seguintes termos iniciais: $HL_0 = 2+i+3\varepsilon+4h$,$HL_1 = 1+3i+4\varepsilon+7h$.

Proposição 1. *A sequência de números híbridos HL_n satisfaz a relação de recorrência híbrida de Lucas $HL_n = HL_{n-1} + HL_{n-2}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&HL_{n-1} + HL_{n-2} \\
&= (L_{n-1} + L_n i + L_{n+1}\varepsilon + L_{n+2}h) + (L_{n-2} + L_{n-1}i + L_n\varepsilon + L_{n+1}h) \\
&= (L_{n-1} + L_{n-2}) + (L_n + L_{n-1})i + (L_{n+1} + L_n)\varepsilon + (L_{n+2} + L_{n+1})h \\
&= L_n + L_{n+1}i + L_{n+2}\varepsilon + L_{n+3}h \\
&= HL_n
\end{aligned}$$

□

Por conseguinte algumas informações sobre os números híbridos de Lucas. De acordo com as relações de recorrência, $HL_n = HL_{n-1} + HL_{n-2}$, podemos agora apresentar sua equação característica, obtendo:

$$\begin{aligned} \frac{HL_n}{HL_{n-1}} &= 1 + \frac{HL_{n-2}}{HL_{n-1}} \\ \frac{HL_n}{HL_{n-1}} &= 1 + \frac{1}{\frac{HL_{n-1}}{HL_{n-2}}} \end{aligned}$$

Denotando $w_n = \frac{HL_n}{HL_{n-1}}$, tem-se: $w_{n-1} = \frac{HL_{n-1}}{HL_{n-2}}$. Deteminando a equação $w_n = 1 + \frac{1}{w_{n-1}}$. Supondo que o limite proposto existe e que seja igual a w, passando o limite nessa última equação, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} w_n &= 1 + \frac{1}{\lim_{n\to\infty} w_{n-1}} \\ w &= 1 + \frac{1}{w} \\ w^2 - w - 1 &= 0 \end{aligned}$$

onde é uma equação de segundo grau possuindo duas raízes reais $w_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $w_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Baseado no que já foi apresentado anteriormente temos que o caráter do número híbrido de Lucas é dada como $C(HL_n) = L_n^2 + (L_{n+1} - L_{n+2})^2 - L_{n+2}^2 - L_{n+3}^2$ e ainda podemos apresentar a norma de um número híbrido de Lucas.

Propriedade 1. *A norma de um número híbrido de Lucas é definida como:*

$$\|HL_n\|^2 = |L_n^2 - 4L_{n+2}F_{n+1} - L_{n+2}^2|$$

Demonstração. Seja a norma de um número híbrido dado por:

$$\begin{aligned} \|HL_n\| &= \sqrt{|C(HL_n)|} = \sqrt{|L_n^2 + L_{n+1}^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - L_{n+3}^2|} \\ \|HL_n\|^2 &= |L_n^2 + L_{n+1}^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - (L_{n+2} + L_{n+1})^2| \\ &= |L_n^2 + L_{n+1}^2 - 2L_{n+1}L_{n+2} - L_{n+2}^2 - 2L_{n+2}L_{n+1} - L_{n+1}^2| \\ &= |L_n^2 - 4L_{n+1}L_{n+2} - L_{n+2}^2| \end{aligned}$$

□

Além disso, o número híbrido de Lucas pode ser representado de forma matricial. Utilizando a forma matricial dos números híbridos que [9] apresenta pode-se definir assim as seguintes matrizes:

$$\varphi_{HL_n} = \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & 2L_{n+1} \\ 2L_{n+2} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix}$$

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{HL_n}\\
&= L_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + L_{n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + L_{n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + L_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & L_{n+1} - L_{n+2} + L_{n+3} \\ L_{n+2} - L_{n+1} + L_{n+3} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & L_{n+1} - L_{n+2} + L_{n+2} + L_{n+1} \\ L_{n+2} - L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+1} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} L_n + L_{n+2} & 2L_{n+1} \\ 2L_{n+2} & L_n - L_{n+2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

□

E ainda, temos a seguinte propriedade que relaciona o determinante de uma matriz com a sua norma.

Propriedade 2. *Se φ_{HL_n} corresponde a matriz hibrida do número híbrido de Lucas, então $|det\varphi_{HL_n}| = \|HL_n\|^2$.*

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
|det\varphi_{HL_n}| &= \begin{vmatrix} L_n + L_{n+2} & 2L_{n+1} \\ 2L_{n+2} & L_n - L_{n+2} \end{vmatrix}\\
&= |(L_n + L_{n+2})(L_n - L_{n+2}) - (2L_{n+1})(2L_{n+2})|\\
&= |L_n^2 - L_n L_{n+2} + L_n L_{n+2} - L_{n+2}^2 - 4L_{n+1}L_{n+2}|\\
&= |L_n^2 - 4L_{n+1}F_{n+2} - L_{n+2}^2|\\
&= \|HL_n\|^2
\end{aligned}
$$

□

A seguir, daremos a função geradora de HL_n, sua fórmula de Binet e algumas identidades encontradas que envolve essa sequências.

Teorema 3. *A função geradora do número híbrido de Lucas, denotado por G_{HL_n}, é:*

$$G_{HL_n}(w) = \frac{HL_0 + (HL_1 - HL_0)w}{1 - w - w^2}$$

Demonstração. Para definir a função geradora do número híbrido de Lucas devemos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{HL_n}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} HL_n w^n$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned}
G_{HL_n}(w) &= HL_0 + HL_1 w + HL_2 w^2 + \cdots + HL_n w^n + \cdots \\
-wG_{HL_n}(w) &= -wHL_0 - w^2 HL_1 - w^3 HL_2 - \cdots - w^{n+1} HL_n - \cdots \\
-w^2 G_{HL_n}(w) &= -w^2 HL_0 - w^3 HL_1 - w^4 HL_2 - \cdots - w^{n+2} HL_n - \cdots
\end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned}
(1 - w - w^2) G_{HL_n}(w) &= HL_0 + (HL_1 - HL_0)w + (HL_2 - HL_1 - HL_0)w^2 + \ldots \\
(1 - w - w^2) G_{HL_n}(w) &= HL_0 + (HL_1 - HL_0)w \\
G_{HL_n}(w) &= \frac{HL_0 + (HL_1 - HL_0)w}{(1 - w - w^2)}
\end{aligned}$$

□

Assim, temos a função geradora para as sequências híbridas de Lucas.

Teorema 4. *Para $n \geq 0$ temos que a fórmula de Binet para o número híbrido de Lucas é dado como:*

$$HL_n = \frac{(HL_1 - HL_0 w_2) w_1^n - (HL_1 - HL_0 w_1) w_2^n}{w_1 - w_2}$$

Onde w_1 e w_2 são as raízes reais da equação característica.

Demonstração. Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representado da seguinte maneira:

$$HL_n = A w_1^n + B w_2^n$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HL_0$ e, para $n = 1$, temos $Aw_1 + Bw_2 = HL_1$. Assim, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = HL_0 \\ Aw_1 + Bw_2 = HL_1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram: $A = \dfrac{HL_1 - HL_0 w_2}{w_1 - w_2}$ e $B = \dfrac{HL_0 w_1 - HL_1}{w_1 - w_2}$ Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, temos:

$$HL_n = \frac{(HL_1 - HL_0 w_2) w_1^n - (HL_1 - HL_0 w_1) w_2^n}{w_1 - w_2}$$

□

A partir da fórmula de Binet apresentada podemos apresentar algumas identidades clássicas na sua forma híbrida. Considerando $R = (HL_1 - HL_0 w_2)$ e $S = (HL_1 - HL_0 w_1)$ tem-se:

$$HL_n = \frac{R w_1^n - S w_2^n}{w_1 - w_2}$$

Teorema 5. *(Identidade de Catalan) Para os números naturais n e k, com $n \geqslant k$, se HL_n é o n-ésimo número híbrido de Lucas, então temos que essa identidade é verdadeira.*

$$HL_{n-k}HL_{n+k} - HL_n^2 \quad = \quad (-1)^{n-k}\left[HL_k^2 + \frac{Rw_1^{2k}(S-R) + Sw_2^{2k}(R-S)}{(w_1-w_2)^2}\right]$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&HL_{n-k}HL_{n+k} - HL_n^2 \\
&= \frac{Rw_1^{n-k} - Sw_2^{n-k}}{w_1 - w_2} \cdot \frac{Rw_1^{n+k} - Sw_2^{n+k}}{w_1 - w_2} - \left(\frac{Rw_1^n - Sw_2^n}{w_1 - w_2}\right)^2 \\
&= \frac{R^2w_1^{2n} - RSw_1^{n-k}w_2^{n+k} - SRw_2^{n-k}w_1^{n+k} + S^2w_2^{2n}}{(w_1-w_2)^2} \\
&- \frac{R^2w_1^{2n} - 2RSw_1^nw_2^n + S^2w_2^{2n}}{(w_1-w_2)^2} \\
&= \frac{-RSw_1^{n-k}w_2^{n+k} - RSw_2^{n-k}w_1^{n+k} + 2RSw_1^nw_2^n}{(w_1-w_2)^2} \\
&= (-1)^{n-k}\frac{RSw_1^{2k} - 2RSw_1^kw_2^k + RSw_2^{2k}}{(w_1-w_2)^2} \\
&= (-1)^{n-k}\frac{RSw_1^{2k} - 2RSw_1^kw_2^k + RSw_2^{2k} + R^2w_1^{2k} + S^2w_2^{2k} - R^2w_1^{2k} - S^2w_2^{2k}}{(w_1-w_2)^2} \\
&= (-1)^{n-k}\left[\frac{R^2w_1^{2k} - 2RSw_1^kw_2^k + S^2w_2^{2k}}{(w_1-w_2)^2} + \frac{RSw_1^{2k} - R^2w_1^{2k} - Sw_2^{2k} + RSw_2^{2k}}{(w_1-w_2)^2}\right] \\
&= (-1)^{n-k}\left[HL_k^2 + \frac{Rw1^{2k}(S-R) + Sw_2^{2k}(R-S)}{(w_1-w_2)^2}\right]
\end{aligned}$$

□

A identidade de Cassini é um caso particular da identidade de Catalan, quando $k = 1$ obtemos o seguinte resultado.

Teorema 6. *(Identidade de Cassini) Para o número natural n, se HL_n é o n-ésimo número híbrido de Lucas, então temos a seguinte identidade:*

$$HL_{n-1}HL_{n+1} - HL_n^2 = (-1)^{n-1}\left[HL_1^2 + \frac{Rw_1^2(S-R) + Sw_2^2(R-S)}{(w_1-w_2)^2}\right]$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
&HL_{n-1}HL_{n+1} - HL_n^2\\
&= \frac{Rw_1^{n-1} - Sw_2^{n-1}}{w_1 - w_2} \cdot \frac{Rw_1^{n+1} - Sw_2^{n+1}}{w_1 - w_2} - \left(\frac{Rw_1^n - Sw_2^n}{w_1 - w_2}\right)^2\\
&= \frac{R^2w_1^{2n} - RSw_1^{n-1}w_2^{n+1} - SRw_2^{n-1}w_1^{n+1} + S^2w_2^{2n}}{(w_1 - w_2)^2}\\
&- \frac{R^2w_1^{2n} - 2RSw_1^nw_2^n + S^2w_2^{2n}}{(w_1 - w_2)^2}\\
&= \frac{-RSw_1^{n-1}w_2^{n+1} - RSw_2^{n-1}w_1^{n+1} + 2RSw_1^nw_2^n}{(w_1 - w_2)^2}\\
&= (-1)^{n-1}\frac{RSw_1^2 - 2RSw_1w_2 + RSw_2^2}{(w_1 - w_2)^2}\\
&= (-1)^{n-1}\frac{RSw_1^2 - 2RSw_1w_2 + RSw_2^2 + R^2w_1^2 + S^2w_2^2 - R^2w_1^2 - S^2w_2^2}{(w_1 - w_2)^2}\\
&= (-1)^{n-1}\left[\frac{R^2w_1^2 - 2RSw_1w_2 + S^2w_2^2}{(w_1 - w_2)^2} + \frac{RSw_1^2 - R^2w_1^2 - Sw_2^2 + RSw_2^2}{(w_1 - w_2)^2}\right]\\
&= (-1)^{n-1}\left[HL_1^2 + \frac{Rw1^2(S - R) + Sw_2^2(R - S)}{(w_1 - w_2)^2}\right]
\end{aligned}$$

□

Teorema 7. *(Identidade de d'Ocagne) Suponha que n seja um número inteiro não negativo e m um número natural. Se HL_n, é o n-enésimo número híbrido de Lucas, a expressão da identidade de d'Ocagne é dada por:*

$$HL_mHL_{n+1} - HL_{m+1}HL_n = (-1)^{n-1}\left[HL_1^2 + \frac{Rw_1^2(S - R) + Sw_2^2(R - S)}{(w_1 - w_2)^2}\right]$$

Demonstração. Esta identidade é uma generalização da identidade de Cassini, fazendo $m = n-1$, temos: $HL_mHL_{n+1} - HL_{m+1}HL_n = HL_{n-1}HL_{n+1} - HL_n^2$ onde pode encontramos a demonstração no teorema anterior. □

Definição 4. *A recorrência para os termos inteiros não positivos dos números híbridos de Lucas, com $n > 1$, tem-se:*

$$HL_{-n} = HL_{-n+2} - HL_{-n+1}$$

Assim é possível calcular os termos com índice inteiro não positivo da sequência híbrida de Lucas. Com isso, temos: $HL_{-1} = -1 + 3i - 4\varepsilon + 7h$ e $HF_{-2} = 3 - 4i + 7\varepsilon - 11h$.

5 Conclusão

Neste trabalho foi possível apresentar um estudo referente ao processo de complexicação da Sequência de Lucas, fundado a partir da sua relação com a Sequência de Fibonacci. Esse processo consiste em o acréscimo da unidade imaginária i e o aumento dimensional das representações algébricas.

E ainda foi estudado, através da relação definida por [9], os números híbridos de Lucas, sendo portanto uma combinação dos números complexos, hiperbólicos e dos números duais de Lucas. Foi possível desenvolver algumas propriedades envolvendo essa sequência híbrida apresentada, incluindo a fórmula de Binet, matriz geradora, equação característica, norma, função geradora, extensão para o campo dos números inteiros e algumas identidades.

O estudo apresentado não tem uma relação direta com as olimpíadas de matemática, uma vez que, até o momento as olimpíadas não apresentem nenhuma questão que aborda tal conteúdo. Por outro lado, é possível que as olimpíadas trabalhem com a sequência de Lucas na sua forma unidimensional, bem como a sua complexificação, pois é uma excelente abordagem para tratar em futuras olimpíadas.

Para trabalhos futuros pode-se estudar propriedades relacionada à essa sequência, assim como a sua aplicação em diversas áreas.

6 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico- CNPq e pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES.

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da FCT- Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P, no âmbito do projeto UID/CED/00194/2020.

Referências

[1] Andre-Jeannin, R. *Generalized complex Fibonacci and Lucas functions.* The Fibonacci Quarterly, **29** (1991), 13-18.

[2] Alves, F. R. V., *Sequência Generalizada de Fibonacci e Relações com o número Áureo.* Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, **2**(6) (2015), 30-36.

[3] Catarino, P., *On k-Pell hybrid numbers.* Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, **22**(1) (2019), 83-89.

[4] Cerda-Morales, G., *Investigation of Generalized Hybrid Fibonacci Numbers and Their Properties.* **arXiv preprint arXiv:1806.02231**, (2018).

[5] Falcon, S., *On the Lucas triangle and its relationship with the k-Lucas numbers*. J. Math. Comput. Sci., **2**(3) (2012), 425-434.

[6] Harman, C. J., *Complex Fibonacci numbers*. Fibonacci Quarterly, **19**(1) (1981), 82-86.

[7] Nunes, P. S. T., *A sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas: propostas práticas de exploração no 3º ciclo do ensino básico*. (2013). Dissertação de Mestrado.

[8] Oliveira, R. R. de, Alves, F. R. V., Paiva, R. E. B., *Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa*. CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, **11** (2017), 91-106.

[9] Özdemir, M., *Introduction to hybrid numbers*. Advances in Applied Clifford Algebras, **28**(1) (2018), 11.

[10] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons, 2019.

[11] Szynal-Liana, A., *The Horadam hybrid numbers*. Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, **38**(1) (2018), 91-98.

[12] Szynal-Liana, A., Wloch, I., *On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers*. Annales Mathematicae Silesianae, Sciendo, (2019), 276-283.

[13] Barik, B., *Lucas sequence, its properties and generalisation*. Master of Science in Mathematics at National Institute of Technology, 2013.

[14] Vieira, R. P. M., Alves, F. R. V., Catarino, P. M. M. C., *Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo*. Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática, **4**(2) (2019), 156-173.

MANGUEIRA, Milena C. (milenacarolina24@gmail.com)

Instituto Federal do Ceará

VIEIRA, Renata P. (re.passosm@gmail.com)

Instituto Federal do Ceará

ALVES, Francisco R. (fregis@ifce.edu.br)

Instituto Federal do Ceará

CATARINO, Paula M. (pcatarino23@gmail.com)

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro