ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 2 No. 1 (2021), pp. 58–67

Formula da interpolação de Lagrange e progressões aritméticas de ordem superior

Cícero Thiago Magalhães e Navid Safaei

Resumo

A Fórmula de Interpolação de Lagrange (FIL) tem um papel imenso em investigar problemas sobre polinômios desconhecidos com apenas valores conhecidos em alguns pontos. No entanto, este não é o único papel crítico da FIL. Neste artigo, lançamos mais luz sobre alguns aspectos menos conhecidos da FIL. Devemos adotá-la para provar identidades, sua relação com a derivação e, a fortiori, suas aplicações em progressões aritméticas de ordem superior, introduzindo o operador de diferenças finitas que, por si só, abrirá um novo leque para os competidores que estão se preparando para competições matemáticas.

Palavras e frases-chave: Interpolação, Lagrange, progressões aritméticas, competições matemáticas.

Lagrange Interpolation Formula and Arithmetic Progressions of Higher Order

Abstract

Lagrange Interpolation Formula (LIF) has an important role in problems about unknown polynomials with known values in only some points. However this is not the only critic role of LIF. In this paper we shed light on some less known aspects of LIF. We use it to prove identities, and we show its relation with derivation and its applications to arithmetic progressions of higher order, introducing the finite differences operator which opens a fan of possibilities for students preparing for mathematical competitions.

Key words and phrases: Interpolation, Lagrange, arithmetic progressionsp, mathematical competitions.

1 Fórmula da interpolação de Lagrange

Teorema 1. *Dados $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$ e $\beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_n$ números complexos com $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n$, distintos dois a dois, existe um único polinômio $P(x)$, de grau no máximo n, tal que*

$$P(\alpha_i) = \beta_i,\ 0 \le i \le n.$$

Demonstração. Veja a construção do polinômio. Seja

$$D_k(\alpha_i) = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Como $D_k(\alpha_i) = 0$ para todo $i \neq k$, então

$$D_k(x) = C(x - \alpha_0)\dots(x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+1})\dots(x - \alpha_n).$$

Para determinar o valor de C vamos substituir $x = \alpha_k$ e usar a condição $D_k(\alpha_k) = 1$. Então,

$$1 = C(\alpha_k - \alpha_0)\dots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\dots(\alpha_k - \alpha_n).$$

Portanto,

$$D_k(x) = \frac{(x - \alpha_0)(x - \alpha_1)\dots(x - \alpha_{k-1})(x - \alpha_{k+1})\dots(x - \alpha_n)}{(\alpha_k - \alpha_0)(\alpha_k - \alpha_1)\dots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\dots(\alpha_k - \alpha_n)}.$$

Agora multiplique $D_k(x)$ pelo número β_k e, então, adicione todos esses polinômios resultando no polinômio

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k D_k(x)$$

que satisfaz as condições do enunciado. Para demonstrar a unicidade, sejam P_1 e P_2 dois polinômios, que satisfazem as condições impostas. O polinômio $H(x) = P_1(x) - P_2(x)$ tem grau no máximo n e possui $n+1$ raízes $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n$. Portanto é identicamente nulo. Com isso, $P_1(x) \equiv P_2(x)$. $\square$

Exemplo 1. *Seja $P(x)$ um polinômio de grau 2 tal que $P(0) = \cos^3 10°$, $P(1) = \cos 10° \sin^2 10°$ e $P(2) = 0$. Determine $P(3)$.*

Solução: Usando a fórmula da interpolação de Lagrange, temos

$$P(x) = P(0) \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + P(1) \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + P(2) \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Como $P(0) = \cos^3 10°$, $P(1) = \cos 10° \sin^2 10°$ e $P(2) = 0$ então

$$P(x) = \cos^3 10° \cdot \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} + \cos 10° \sin^2 10° \cdot \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} + 0 \cdot \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}.$$

Queremos $P(3)$, assim

$$P(3) = \cos^3 10° \cdot \frac{(3-1)(3-2)}{(0-1)(0-2)} + \cos 10° \sin^2 10° \cdot \frac{(3-0)(3-2)}{(1-0)(1-2)} + 0 \cdot \frac{(3-0)(3-1)}{(2-0)(2-1)} \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10° \cdot 1 + \cos 10° \sin^2 10° \cdot (-3) \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10° - 3\cos 10° \sin^2 10° \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos^3 10° - 3\cos 10°(1 - \cos^2 10°) \Leftrightarrow$$

$$P(3) = 4\cos^3 10° - 3\cos 10° \Leftrightarrow$$

$$P(3) = \cos 3 \cdot 10° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exemplo 2. *(IMO Shortlist 1983) Seja* $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ *e seja* f *um polinômio de grau* 990 *tal que* $f(k) = F_k,\ k \in \{992,\ 993,\ \ldots, 1982\}$. *Mostre que* $f(1983) = F_{1983} - 1$.

Solução: Temos que $f(k+992) = F_{k+992}$, para $k = 0, 1, \ldots, 990$ e precisamos provar que $f(992+991) = F_{1983} - 1$. Seja $g(x) = f(x+992)$, que também possui grau 990. Nosso novo problema é tal que se $g(k) = F_{k+992}$, para $k = 0, 1, \ldots, 990$, então $g(991) = F_{1983} - 1$. Usando a fórmula da interpolação de Lagrange, temos que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{990} g(k) \cdot \frac{(x-0)(x-1)\ldots(x-k+1)(x-k-1)\ldots(x-990)}{(k-1)(k-2)\ldots 1 \cdot (-1)\ldots(k-990)}.$$

Então

$$g(991) = \sum_{k=0}^{990} g(k) \binom{991}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{990} \binom{991}{k} F_{k+992} (-1)^k.$$

Sabemos que $F_n = \dfrac{a^n - b^n}{\sqrt{5}}$, em que $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim,

$$\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}F_{k+992}(-1)^k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}a^{k+992}(-1)^k-\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}b^{k+992}(-1)^k\right].$$

Usando binômio de Newton temos que

$$\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}a^{k+992}(-1)^k=a^{992}\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}(-a)^k=a^{992}\left[(1-a)^{991}+a^{991}\right].$$

Mas $a^2=a+1$, então

$$a^{992}\left[(1-a)^{991}+a^{991}\right]=a(a-a^2)^{991}+a^{1983}=-a+a^{1983}.$$

Temos que $b^2=b+1$ então

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{990}\binom{991}{k}F_{k+992}(-1)^k&=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{1983}-b^{1983}-a+b)\\&=\frac{a^{1983}-b^{1983}}{\sqrt{5}}-\frac{a-b}{\sqrt{5}}=F_{1983}-1.\end{aligned}$$

Exemplo 3. *Se f é um polinômio de grau n tal que $f(i)=2^i$, para $i=0,\ 1,\ \ldots,n$, determine $f(n+1)$.*

Solução: Usando a formula da interpolação de Lagrange, temos:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}2^i\frac{(x-0)(x-1).\ldots(x-i+1)(x-i-1)\ldots(x-n)}{(i-0)(i-1)\ldots1.(-1).(-2)\ldots(i-n)}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}2^i\frac{(x-0)(x-1)\ldots(x-i+1)(x-i-1)\ldots(x-n)}{(-1)^{n-i}i!(n-i)!}\Leftrightarrow$$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}2^i(-1)^{n-i}\frac{(x-0)(x-1)\ldots(x-i+1)(x-i-1)\ldots(x-n)}{i!(n-i)!}\Leftrightarrow$$

Assim,

$$f(n+1)=\sum_{i=0}^{n}2^i(-1)^{n-i}\frac{(n+1).n\ldots(n+2-i)(n-i)\ldots1}{i!(n-i)!}\Leftrightarrow$$

$$f(n+1) = \sum_{i=0}^{n} 2^i(-1)^{n-i}\frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} \Leftrightarrow$$

$$f(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} 2^i(-1)^{n-i} \Leftrightarrow$$

$$-f(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} 2^i(-1)^{n+1-i} \Leftrightarrow$$

$$-f(n+1) = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} 2^i(-1)^{n+1-i} - \binom{n+1}{n+1} 2^{n+1}(-1)^{n+1-n-1} \Leftrightarrow$$

$$-f(n+1) = (2-1)^{n+1} - 2^{n+1} \Leftrightarrow$$

$$f(n+1) = 2^{n+1} - 1.$$

Podemos concluir que se $P(x)$ é um polinômio de grau n, tal que os valores de $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ são todos conhecidos, então $P(n+1)$ será uma combinação linear de $P(0), P(1), \ldots, P(n)$. Em outras palavras,

$$P(n+1) = A_0P(0) + A_1P(1) + \ldots + A_nP(n),$$

com $A_0, A_1, \ldots, A_n$ constantes.

Exemplo 4. *Seja $P(x)$ um polinômio de grau 5 tal que $P(1) = 0$, $P(3) = 1$, $P(9) = 2$, $P(27) = 3$, $P(81) = 4$ e $P(243) = 5$. Determine o coeficiente de x em $P(x)$.*

Solução: Usando a formula da interpolação de Lagrange, segue que:

$$P(x) = \frac{(x-3)(x-9)(x-27)(x-243)}{(1-3)(1-9)(1-27)(1-243)}P(1) + \ldots$$

$$+\frac{(x-1)(x-3)(x-9)(x-27)(x-81)}{(243-1)(243-3)(243-9)(243-27)(243-81)}P(243).$$

É possível perceber que determinar o coeficiente de x na fórmula da interpolação será muito trabalhoso, de tal forma que iremos proceder de outra maneira. Considere $Q(x) = P(3x) - P(x) - 1$, então $Q(1) = Q(3) = \ldots = Q(81) = 0$. Como o grau de $Q(x)$ é 5 conclui - se que $Q(x) = C(x-1)(x-3)(x-9)(x-27)(x-81)$, para alguma constante C. Além disso, $Q(0) = -1$ e, com isso, $C = \frac{1}{3^{10}}$. Se a é o coeficiente de x em $P(x)$, segue que o coeficiente de x em $Q(x)$ é $2a$. Por outro lado, o coeficiente de x em $Q(x)$ é $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{121}{81}$. Portanto, $a = \frac{121}{162}$.

Exemplo 5. *Seja $P(x)$ um polinômio com grau, no máximo, 2020, tal que $P(k^2) = k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2020$. Prove que $P(2021^2) = 2021 - \binom{4040}{2020}$.*

Solução: De acordo com a fórmula da interpolação de Lagrange, segue que:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2020} k \prod_{0 \le j \le 2020,\ j \ne k} \frac{(x - j^2)}{(k^2 - j^2)}$$

Então,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{2020} \frac{2(-1)^k k}{(2020-k)!(2020+k)!(x-k^2)} \prod_{j=0}^{2020} (x - j^2).$$

Segue que

$$P(2021^2) = \sum_{k=0}^{2020} (-1)^k k \binom{4042}{2021-k}.$$

Isto é igual a

$$\begin{aligned} 2021 - \sum_{k=0}^{2021} (-1)^{k+1} k \left(\binom{4041}{2021-k} + \binom{4041}{2020-k} \right) \\ = 2021 - \sum_{k=0}^{2021} (-1)^{k+1} \binom{4041}{2021-k} \\ = 2021 - \binom{4040}{2020}. \end{aligned}$$

Exemplo 6. *Determine o valor da soma*

$$\sum_{k=1}^{1000} \frac{(2^k - 3^1)\ldots(2^k - 3^{1000})}{(2^k - 2^1)\ldots(2^k - 2^{k-1})(2^k - 2^{k+1})\ldots(2^k - 2^{1000})}.$$

Solução: Seja $P(x) = (x - 3^1)\ldots(x - 3^{1000}) - (x - 2^1)\ldots(x - 2^{1000})$. Veja que o grau de $P(x)$ é 999. Usando a fórmula de interpolação de Lagrange para $P(x)$, em $x = 1, \ldots, 2^{1000}$, segue que:

$$P(x) = \sum_{k=1}^{1000} \frac{(x - 2^1)\ldots(x - 2^{k-1})(x - 2^{k+1})\ldots(x - 2^{100})(2^k - 3^1)\ldots(2^k - 3^{1000})}{(2^k - 2^1)\ldots(2^k - 2^{k-1})(2^k - 2^{k+1})\ldots(2^k - 2^{1000})}.$$

Portanto, a soma desejada é o coeficiente líder de $P(x)$, que é:

$$2^1 + \ldots + 2^{1000} - (3^1 + \ldots + 3^{1000}) =$$

$$2^{1001} - 2 + (\frac{3^{1001} - 3)}{2}.$$

Exemplo 7. *Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ números complexos distintos. Prove que é possível encontrar números complexos $a_1, a_2, \ldots, a_n$, de maneira única, satisfazendo*

$$\frac{1}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)} = \frac{a_1}{z-z_1} + \ldots + \frac{a_n}{z-z_n},$$

para cada z.

Solução: Usando a fórmula da interpolação de Lagrange para escrever o polinômio $P(x) = 1$, em $z_1, z_2, \ldots, z_n$, segue que:

$$1 = \frac{(z-z_2)\ldots(z-z_n)}{(z_1-z_2)\ldots(z_1-z_n)} + \ldots + \frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})}{(z_n-z_1)\ldots(z_n-z_{n-1})}.$$

Assim,

$$\frac{1}{(z-z_1)\ldots(z-z_n)}$$

$$= \frac{(z-z_2)\ldots(z-z_n)}{(z_1-z_2)\ldots(z_1-z_n)} \cdot \frac{1}{(z-z_1)} + \ldots + \frac{(z-z_1)\ldots(z-z_{n-1})}{(z_n-z_1)\ldots(z_n-z_{n-1})} \cdot \frac{1}{(z-z_n)}.$$

Portanto, $a_1 = \dfrac{1}{(z_1-z_2)\ldots(z_1-z_n)}, \ldots, a_n = \dfrac{1}{(z_n-z_1)\ldots(z_n-z_{n-1})}$.

Exemplo 8. *Prove que se x, y e z são números reais distintos, então*

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} = 1.$$

Solução: Seja $P(t) = t^2$, usando a fórmula da interpolação de Lagrange para $P(t)$ e os números reais x, y e z, segue que:

$$t^2 = \frac{x^2(t-y)(t-z)}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2(t-x)(t-z)}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2(t-x)(t-y)}{(z-x)(z-y)}.$$

Examinando o coeficiente de t^2 nos dois lados da última igualdade, obtém - se:

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)} = 1.$$

2 Progressões aritméticas de ordem superior

Vamos definir, também para as sequências, o operador diferença.

Definição 1. *Define - se para sequências o operador Δ, chamado de operador diferença, por $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$.*

Definição 2. *Uma progressão aritmética de ordem k $(k > 2)$ é uma sequência das diferenças entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão aritmética de ordem $k-1$.*

Teorema 2. *(a_n) é uma progressão aritmética de ordem p, $(p \geq 1)$, se, e somente se, a_n é um polinômio de grau p em n.*

Demonstração. Vamos proceder por indução sobre p. Para $p = 1$, o teorema decorre da expressão do termo geral de uma progressão aritmética não constante. Suponha que o teorema seja verdadeiro para todo $p \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Mostraremos que essa afirmação é verdadeira para $p = k+1$. Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $k+1$, $b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ é uma progressão aritmética de ordem k e, pela hipótese de indução, b_n é um polinômio de grau k em n. É possível provar que se Q é um polinômio de grau p, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q(i)$ é um polinômio de grau $p+1$ em n. Assim, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i = a_{n+1} - a_1$é um polinômio de grau k em n. Se a_n é um polinômio de grau $k+1$ em n, Δa_n é um polinômio de grau k em n. Pela hipótese de indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem k, ou seja, (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $k+1$. □

Exemplo 9. *Seja $P(x)$ um polinômio de grau 3 tal que $P(1) = \log 1$, $P(2) = \log 2$, $P(3) = \log 3$ e $P(4) = \log 4$. Determine o valor de $\dfrac{P(5)}{6}$.*

Solução: Como P é um polinômio de grau 3 tal que $P(1) = \log 1$, $P(2) = \log 2$, $P(3) = \log 3$ e $P(4) = \log 4$, então a sequência $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$ é uma progressão aritmética de ordem 3. Assim,

$$P(1) = \log 1,\ P(2) = \log 2,\ P(3) = \log 3,\ P(4) = \log 4,\ P(5),$$

Acima temos uma P.A. de ordem 3.

$$P(2) - P(1),\ P(3) - P(2),\ P(4) - P(3),\ P(5) - P(4)$$

Acima temos uma P.A. de ordem 2.

$$P(3)-2P(2)+P(1),\ P(4)-2P(3)+P(2),\ P(5)-2P(4)+P(3)$$

Acima temos uma P.A.

$$2P(4)-4P(3)+2P(2)=P(5)-2P(4)+2P(3)-2P(2)+P(1)\Leftrightarrow$$
$$P(5)=4P(4)-6P(3)+4P(2)-P(1)\Leftrightarrow$$
$$P(5)=4\log 4-6\log 3+4\log 2-\log 1\Leftrightarrow$$
$$P(5)=\log 4^4-\log 3^6+\log 2^4\Leftrightarrow$$
$$P(5)=\log\frac{4^6}{3^6}=\log(\frac{4}{3})^6\Leftrightarrow$$
$$\frac{P(5)}{6}=\log\frac{4}{3}.$$

Exemplo 10. *Se f é um polinômio de grau n tal que $f(i)=2^i$, para $i=0,\ 1,\ \ldots,n$, determine $f(n+1)$.*

Solução: Como f é um polinômio de grau n, então a sequência $f(0),f(1),f(2),\ldots,f(n-1),f(n)$ e $f(n+1)$ é uma progressão aritmética de ordem n. Assim,

$$f(0)=2^0,\ f(1)=2^1,\ f(2)=2^2,\ \ldots\ f(n-1)=2^{n-1},\ f(n)=2^n,\ f(n+1).$$

Acima temos uma P.A. de ordem n.

$$2^1-2^0=2^0,\ 2^2-2^1=2^1,\ \ldots\ 2^n-2^{n-1}=2^{n-1},\ f(n+1)-2^n$$

Acima temos uma P.A. de ordem $n-1$.

$$2^1-2^0=2^0,\ 2^2-2^1=2^1,\ \ldots\ 2^n-2^{n-1}=2^{n-1},\ f(n+1)-2^n-2^{n-1}$$

Acima temos uma P.A. de ordem $n-2$.

$$2^1-2^0=2^0,\ 2^2-2^1=2^1,\ f(n+1)-2^n-2^{n-1}-2^{n-2}-\ldots-2^2$$

Acima temos uma P.A. tradicional. Portanto,

$$2^0+f(n+1)-2^n-2^{n-1}-\ldots-2^2=2\cdot 2^1\Leftrightarrow$$
$$f(n+1)=2^n+2^{n-1}+\ldots+2^2+2^1+1$$
$$f(n+1)=2^{n+1}-1.$$

Bibliografia

1. Titu Andreescu, Navid Safaei, Alessandro Ventullo, *117 Polynomial problems: from the AwesomeMath Summer Program*, XYZ Press, 2019.
2. Luis Lopes, *Manual de sequências e séries, v. 2*, QED TEXTE, 2005.
3. Antonio Caminha Muniz Neto, *Tópicos de Matemática Elementar: Polinômios*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

Cicero Thiago MAGALHAES (cicerothmg@gmail.com)
Universidade Federal do Ceará, Brasil.
Navid SAFAEI (navid_safaei@gsme.sharif.edu)
Sharif University of Technology, Department of Mathematical Olympiads
Salam Schools complex, Tehran, Iran.