Espacio Matemático Vol. 2 No. 1 (2021), pp. 83–97

Problemas y Soluciones

José Nieto, Jorge Tipe (eds.)

El objetivo de esta sección es presentar problemas matemáticos interesantes y sus soluciones. Invitamos a los lectores a proponer problemas que puedan ser abordados por estudiantes de la escuela media o de los dos primeros años de universidad sin conocimientos especializados. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse a los editores por correo electrónico, en español, portugués o inglés. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada. Problemas abiertos conocidos no son aceptables.

Problems and Solutions

The goal of this section is to present interesting mathematical problems and its solutions. We invite the readers to propose problems which may be tackled by high school or college students without specialized knowledge. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editors in English, Spanish or Portuguese. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely. Known open problems are not suitable.

1 Problemas propuestos

Recordamos que se siguen recibiendo soluciones a los problemas 1, 2, 4, 5, 7 y 8 publicados en números anteriores.

17. En un bosque hay 5 árboles A, B, C, D, E, que se encuentran en ese orden sobre una línea recta. En el punto medio de AB hay una margarita, en el punto medio de BC hay un rosal, en el punto medio de CD hay un jazmín y en el punto medio de DE hay un clavel. La distancia entre A y E es de 28 m; la distancia entre la margarita y el clavel es de 20 m. Calcular la distancia entre el rosal y el jazmín.

    (Olimpiada de Mayo 2021, primer nivel).

18. En un tablero cuadriculado de 2×8 se desea colorear cada casilla de rojo o azul de modo tal que en cada subtablero de 2×2 haya al menos 3 casillas pintadas de azul. ¿De cuántas maneras se puede realizar esta coloración?

Nota: Un subtablero de 2×2 es un cuadrado formado por cuatro casillas que tienen un vértice común.

(Olimpiada de Mayo 2021, primer nivel).

19. En un año que tiene 365 días, ¿cuál es la máxima cantidad de "martes 13" que puede haber?

(Olimpiada de Mayo 2021, primer nivel).

20. Beto escribió 36 enteros positivos consecutivos en el pizarrón. Calculó la suma de todos los dígitos de los 16 números más pequeños y escribió el resultado en color azul. Luego calculó la suma de todos los dígitos de los 10 números más grandes y escribió el resultado en color rojo. ¿Es posible que el número azul sea menor o igual que el número rojo? Si la respuesta es sí, mostrar cuáles pueden ser los números que escribió Beto; si la respuesta es no, explicar por qué es imposible.

(Olimpiada de Mayo 2021, primer nivel).

21. En cada vértice de un polígono de 13 lados escribimos uno de los números $1, 2, 3, \ldots, 12, 13$, sin repetir. Luego, en cada lado del polígono escribimos la diferencia de los números de los vértices de sus extremos (el mayor menos el menor). Por ejemplo, si dos vértices consecutivos del polígono tienen los números 2 y 11, en el lado que determinan se escribe el número 9.

a) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 5?

b) ¿Es posible numerar los vértices del polígono de modo que en los lados sólo se escriban los números 3, 4 y 6?

(Olimpiada de Mayo 2021, segundo nivel).

22. Demostrar que existen 100 enteros positivos distintos $n_1, n_2, \ldots, n_{100}$ tales que

$$\frac{n_1^3 + n_2^3 + \cdots + n_{100}^3}{100}$$

es un cubo perfecto.

(Olimpiada de Mayo 2021, segundo nivel).

2 Soluciones

9. [**1**(2) (2020) p. 140.] Samantha debe escribir en la pizarra algunos números enteros positivos distintos. Después de haberlos escrito, diremos que un número

k ha sido capturado por Samantha si hay en la pizarra dos números distintos cuyo máximo común divisor es k. ¿Cuál es la menor cantidad de números que puede escribir Samantha para que los catorce números $1, 2, 3, \ldots, 14$ sean capturados? Mostrar un ejemplo con esa cantidad de números y explicar por qué si escribe menos números no puede lograrlo.

Solución de Angel Napa, IMPA, Brasil

Supongamos que Samantha pueda escribir a lo más 6 números en la pizarra de modo que los primeros 14 enteros positivos sean capturados. Sea S el conjunto de los números escritos por Samantha y n la cantidad de elementos de S. Denotaremos con A al subconjunto de S formado por sus elementos pares y B el subconjunto formado por los elementos impares. A y B tienen a y b elementos, respectivamente.

Como 1 es un número capturado, existen dos números en S que son coprimos. Esto implica la presencia de al menos un número impar en el conjunto, por lo tanto tenemos que

$$b \geq 1$$

Por otro lado, como $2k$ y $2k-1$ son números capturados, con $1 \leq k \leq 7$, existen los conjuntos $A_k = \{a_k, b_k\}, B_k = \{c_k, d_k\} \subset S$ con $mcd(a_k, b_k) = 2k$ y $mcd(c_k, d_k) = 2k-1$. Por unicidad de mcd, los catorce subconjuntos obtenidos son distintos 2 a 2.

Como los elementos de todos los A_k son pares, tenemos que $A_1, \ldots, A_7$ son subconjuntos de A. Tenemos entonces:

$$7 \leq \# \text{ subconjuntos de 2 elementos de } A = \binom{a}{2}$$

De esto tenemos que

$$a \geq 5$$

Por otro lado, si $B_k \subset A$ para algún k, ambos elementos de B_k serían pares y esto implicaría que su mcd también, lo cual no es posible. Tenemos entonces que todos conjuntos $B_1, \ldots, B_7$ son subconjuntos de 2 elementos de S, que no están incluidos en A. Esto implica lo siguiente:

$$7 \leq \# \text{ subconjuntos de 2 elementos de } S \text{no incluidos en } A = \binom{n}{2} - \binom{a}{2} = 6$$

Esto es una contradicción. Así que Samantha debe escribir al menos 7 números en la pizarra para que se cumplan las condiciones del problema.

Una forma que Samantha escriba 7 números en la pizarra que cumplan las condiciones del problema es la siguiente:

$$S = \{6, 45, 70, 156, 440, 504, 1001\}$$

Los siguientes subconjuntos de S:

$$S_1 = \{6, 1001\}, S_2 = \{6, 70\}, S_3 = \{6, 45\}, S_4 = \{156, 440\}, S_5 = \{45, 70\},$$

$$S_6 = \{6, 156\}, S_7 = \{70, 1001\}, S_8 = \{440, 504\}, S_9 = \{45, 504\}, S_{10} = \{70, 440\},$$

$$S_{11} = \{440, 1001\}, S_{12} = \{156, 504\}, S_{13} = \{156, 1001\}, S_{14} = \{70, 504\}$$

Tienen la propiedad de que el número k es capturado por los dos elementos del subconjunto S_k.

Concluimos que la mínima cantidad de números que debe escribir Samantha es 7.

10. [**1**(2) (2020) p. 140.] Un número de siete dígitos es divisible por el producto de sus dígitos. ¿Cuál es la mayor cantidad de veces que puede aparecer el dígito 5 entre los dígitos de dicho número?

    Solución de Angel Napa, IMPA, Brasil

    Supongamos que existe un número de 7 dígitos con al menos cuatro de ellos 5, que cumpla las condiciones del problema. Esto significa que el número será divisible por 5^4. Denotemos a tal número de la siguiente manera:

    $$N = \overline{a_7 a_6 \ldots a_1}$$

    La presencia de un dígito par implica que el número sea divisible por 10, con esto $0 = a_1$ sería un divisor de N, lo cual no es posible. Por lo tanto, todos los dígitos de N son impares. Además, para cualquier k menor a 8 se cumple lo siguiente:

    $$N - \overline{a_k \ldots a_1} = 10^k \overline{a_7 \ldots a_{k+1}} \rightarrow N \equiv \overline{a_k \ldots a_1} (mod\ 5^k)$$

    Usaremos lo obtenido arriba para obtener algunos dígitos de N:

    $$0 \equiv N \equiv a_1 (mod\ 5) \rightarrow a_1 = 5$$

    $$0 \equiv N \equiv \overline{a_2 a_1} \equiv 10a_2 + 5 (mod\ 25)$$

    $$\rightarrow 0 \equiv 2a_2 + 1 (mod\ 5) \rightarrow a_2 \equiv 2 (mod\ 5) \rightarrow a_6 = 7$$

$$0 \equiv N \equiv \overline{a_3a_2a_1} \equiv 100a_3 + 75(mod\ 125)$$

$$\rightarrow 0 \equiv 4a_3 + 3(mod\ 5) \rightarrow a_3 \equiv 3(mod\ 5) \rightarrow a_3 = 3$$

$$0 \equiv N \equiv \overline{a_4a_3a_2a_1} \equiv 1000a_4 + 375(mod\ 625)$$

$$0 \equiv 8a_4 + 3(mod\ 5) \rightarrow a_4 \equiv 4(mod\ 5) \rightarrow a_4 = 9$$

Por hipótesis, $N = \overline{a_7a_6a_59375}$ tiene al menos cuatro dígitos 5. La única manera de que esto sea cierto es que N sea igual a 5559375, pero

$$N \equiv 5 + 5 + 5 + 9 + 3 + 7 + 5 \equiv 39 \equiv 3(mod\ 9)$$

Entonces N no es divisible por 9 que es uno de sus dígitos. Esto es una contradicción partiendo de que N podía tener al menos cuatro dígitos 5. Por otro lado, el número 1551375 cumple todas las características, pues

$$1551375 = (1 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 5) \cdot 591$$

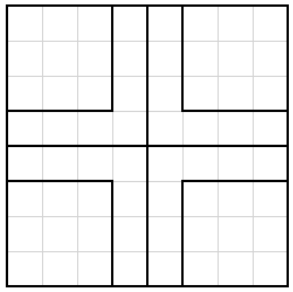
Concluimos que la máxima cantidad de dígitos 5 que puede tener un número que cumpla las condiciones del problema es tres.

11. [**1**(2) (2020) p. 141.] Cada casilla de un tablero de 8×8 se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cada subtablero de 3×3 tenga al menos una casilla de cada uno de los tres colores. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?

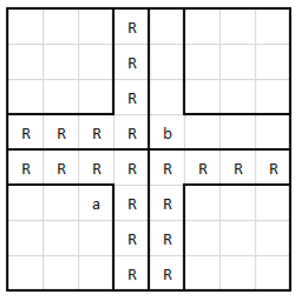
    Solución de Angel Napa, IMPA, Brasil

    Primero probaremos que la cantidad de casillas rojas es a lo mucho 54. Por contradicción, supongamos que existe una coloración del tablero con al menos 55 casillas rojas de modo que cumpla las condiciones del problema. Esto significa que hay a lo mucho 9 casillas que no son de color rojo.

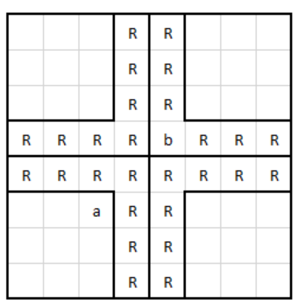
    Enumeremos las filas de abajo a arriba del 1 al 8 y las columnas de izquierda a derecha del 1 al 8. Nos referiremos a la casilla (i, j) a la que pertenece a la fila i y la columna j. Ahora, el tablero de 8×8 puede separarse en cuatro cuadrantes de 4×4, y cada uno de estos cuadrantes puede partirse en un subtablero de 3×3 y el resto un subtablero en forma de L, de modo que los subtableros de 3×3 estén en las esquinas del tablero. Llamaremos $L-piezas$ a los subtableros en forma de L mencionados.



Sabemos que en cada subtablero de 3×3 hay al menos dos casillas que no son de color rojo. Si hubiera a lo más 9 casillas no rojas, a lo mucho una de las $L - piezas$ no es completamente roja, y es más, tiene a lo mucho una casilla que no es roja. Sin perder generalidad, podemos asumir que las $L - piezas$ del segundo, tercer y cuarto cuadrante son completamente rojas.



Considerando el subtablero de 3×3 con centro la casilla $(4, 4)$, 7 de sus casillas son rojas, así que las dos restantes no lo son. En particular, la casilla $(5, 5)$ no es roja. Como hay a lo más una casilla no roja en la $L - pieza$ que la contiene, todas las demás casillas de esta $L - pieza$ son rojos. Además, como ya hay al menos una casilla no roja en la cruz formada por las 4 $L - piezas$, para que haya a lo más 9 casillas no rojas en todo el tablero, cada uno de los subtableros de 3×3 en las esquinas debe tener exactamente 2 casillas no rojas.



Tomando el subtablero de 3×3 con centro en $(7, 5)$, debe haber al menos dos casillas no rojas entre las casillas $(6, 6), (7, 6)$ y $(8, 6)$. Pero por lo mencionado arriba, debe haber exactamente 2 no rojas entre estas tres, y el resto de casillas del subtablero de 3×3 con centro en $(7, 7)$ deben ser rojas.

			R	R		R	R
			R	R		R	R
			R	R		R	R
R	R	R	R	b	R	R	R
R	R	R	R	R	R	R	R
		a	R	R			
			R	R			
			R	R			

Sin embargo, vemos que en el subtablero de 3×3 con centro en $(5, 7)$ hay al menos 8 casillas rojas, lo que no permite la presencia de al menos un verde y un azul.

Concluimos que a lo mucho debe haber 54 casillas rojas. Como ejemplo podemos tomar el siguiente tablero:

		V			V		
		A			A		
		V			V		
		A			A		
		V			V		

Las casillas sin letra representan a las casillas rojas. No es difícil verificar que cada subtablero de 3×3 tiene exactamente 7 casillas rojas, una verde y una azul. Concluimos que la máxima cantidad de casillas rojas que puede tener un tablero es 54.

12. [**1**(2) (2020) p. 141.] Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo. Sean h_i, w_i y m_i la altura, la bisectriz y la mediana, respectivamente, que parten del vértice A_i. Pruebe que si h_1, w_2 y m_3 son concurrentes, y también h_2, w_3 y m_1 son concurrentes, entonces $A_1A_2A_3$ es equilátero.

    Solución de Angel Napa, IMPA, Brasil

    Sea $i \in \{1, 2, 3\}$. Sea H_i, B_i y M_i los pies de la altura, bisectriz y mediana que pasan por A_i. Hasta ahora todos los puntos definidos tiene índices menor a 4. Para evitar hacer casos, si tenemos algun punto X_j con índice j mayor a 3, nos estaremos refiriendo al punto X_{j-3}. Así por ejemplo A_4 y M_5 representan a los puntos A_1 y M_2, definidos en el problema. Además, definiremos 3 variables:

$$a_1 = A_2A_3, \quad a_2 = A_3A_1, \quad a_3 = A_1A_2$$

Ahora, como sabemos que las tres alturas son concurrentes, así como las 3 medianas y las 3 bisectrices, tenemos lo siguiente usando Ceva:

$$\frac{A_1H_3}{H_3A_2} \cdot \frac{A_2H_1}{H_1A_3} \cdot \frac{A_3H_2}{H_2A_1} = 1$$

$$\frac{A_1M_3}{M_3A_2} \cdot \frac{A_2M_1}{M_1A_3} \cdot \frac{A_3M_2}{M_2A_1} = 1$$

$$\frac{A_1B_3}{B_3A_2} \cdot \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3B_2}{B_2A_1} = 1$$

El problema nos da por dato dos ternas de cevianas concurrentes: A_1H_1, A_2B_2, A_3M_3 y A_2H_2, A_3B_3, A_1M_1.

$$\frac{A_2H_1}{H_1A_3} \cdot \frac{A_3B_2}{B_2A_1} \cdot \frac{A_1M_3}{M_3A_2} = 1$$

$$\frac{A_3H_2}{H_2A_1} \cdot \frac{A_1B_3}{B_3A_2} \cdot \frac{A_2M_1}{M_1A_3} = 1$$

Multiplicando las primeras 3 igualdades y dividiendo entre el producto de estas últimas 2 tenemos lo siguiente:

$$\frac{A_1H_3}{H_3A_2} \cdot \frac{A_2B_1}{B_1A_3} \cdot \frac{A_3M_2}{M_2A_1} = 1$$

Lo que significa que A_3H_3, A_1B_1, A_2M_2 es una terna de rectas concurrentes. Podemos decir entonces que, para cualquier índice $i \in \{1, 2, 3\}$ Tenemos que las rectas $A_iH_i, A_{i+1}B_{i+1}, A_{i+2}M_{i+2}$ son concurrentes. Usaremos el theorema de la bisectriz, y el hecho de que M_{i+2} es punto medio de A_iA_{i+1} para simplificar la expresion obtenida del teorema de Ceva:

$$1 = \frac{A_{i+1}H_i}{H_iA_{i+2}} \cdot \frac{A_{i+2}B_{i+1}}{B_{i+1}A_i} \cdot \frac{A_iM_{i+2}}{M_{i+2}A_{i+1}}$$

$$= \frac{A_{i+1}H_i}{H_iA_{i+2}} \cdot \frac{A_{i+2}A_{i+1}}{A_{i+1}A_i} \cdot 1 = \frac{A_{i+1}H_i}{H_iA_{i+2}} \cdot \frac{a_i}{a_{i+2}}$$

$$\rightarrow \frac{A_{i+1}H_i}{H_iA_{i+2}} = \frac{a_{i+2}}{a_i}$$

De este último resultado podemos obtener los segmentos $A_{i+1}H_i$ y H_iA_{i+2} en función de a_1, a_2, a_3:

$$a_i = A_{i+1}A_{i+2} = A_{i+1}H_i + H_iA_{i+2} = \frac{a_{i+2}}{a_i}H_iA_{i+2} + H_iA_{i+2}$$

$$\rightarrow H_iA_{i+2} = \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+2}} \quad , \quad A_{i+1}H_i = \frac{a_ia_{i+2}}{a_i + a_{i+2}}$$

Por otro lado, los triángulos $A_iA_{i+1}H_i$ y $A_{i+2}A_{i+1}H_{i+2}$ son semejantes (tienen los mísmos ángulos), así que se tiene:

$$\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}H_i} = \frac{A_{i+2}A_{i+1}}{A_{i+1}H_{i+2}} \rightarrow A_iA_{i+1} \cdot A_{i+1}H_{i+2} = A_{i+2}A_{i+1} \cdot A_{i+1}H_i$$

$$\rightarrow a_{i+2} \cdot \frac{a_{i+2}^2}{a_{i+2} + a_{i+1}} = a_i \cdot \frac{a_ia_{i+2}}{a_i + a_{i+2}}$$

$$\frac{a_{i+2}^2}{a_{i+2} + a_{i+1}} = \frac{a_i^2}{a_i + a_{i+2}}$$

Uniendo las tres igualdades al variar i tenemos lo siguiente:

$$\frac{a_1^2}{a_1 + a_3} = \frac{a_2^2}{a_2 + a_1} = \frac{a_3^2}{a_3 + a_2}$$

Usando la primeras dos fracciones se obtiene:

$$a_3 = \frac{a_1^3 + a_1^2a_2 - a_2^2a_1}{a_2^2}$$

Reemplazando a_3 en las últimas dos fracciones:

$$a_2^3 + a_2^2a_3 = a_3^2(a_1 + a_2)$$

$$a_2^3 + a_1^3 + a_1^2a_2 - a_2^2a_1 = \left(\frac{a_1^3 + a_1^2a_2 - a_2^2a_1}{a_2^2}\right)^2 \cdot (a_1 + a_2)$$

Desarrollando esta expresión se tiene:

$$a_1^7 + 3a_1^6a_2 + a_1^5a_2^2 - 3a_1^4a_2^3 - 2a_1^3a_2^4 + a_1a_2^6 - a_2^7 = 0$$

$$(a_1 - a_2)(a_1^6 + 4a_1^5 a_2 + 5a_1^4 a_2^2 + 2a_1^3 a_2^3 + 1) = 0$$

Como el segundo factor es siempre positivo obtenemos:

$$a_1 = a_2 = l$$

Reemplazando esto con la fórmula de a_3:

$$a_3 = \frac{l^3 + l^3 - l^3}{l^2} = l$$

Como tememos que $a_1 = a_2 = a_3$, concluimos que $A_1A_2A_3$ es un triángulo equilátero.

13. [**1**(2) (2020) p. 141.]

    a) Sea $\overline{pqrst}$ un entero positivo que no es múltiplo de 10. ¿Es posible que el resultado de sumar los números $\overline{pqrst}$ y $\overline{tsrqp}$ sea un número tal que todos sus dígitos sean impares?

    b) Sea $\overline{abcdefg}$ un entero positivo que no es múltiplo de 10. ¿Es posible que el resultado de sumar los números $\overline{abcdefg}$ y $\overline{gfedcba}$ sea un número tal que todos sus dígitos sean impares?

    Solución de Martín Andonegui Zabala, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela

    a) No es posible. Para que todos los dígitos de la suma $\overline{pqrst} + \overline{tsrqp}$ sean impares, $t + p$ debe ser impar. Además, como la suma de los dígitos de las centenas es par ($2r$), para que se convierta en impar se requiere que la suma de los dígitos de las decenas $q + s$ sea ≥ 10, para que haya una unidad de llevada hacia las centenas. Pero esto hace que el dígito de la suma en las decenas de mil sea necesariamente par, ya que $p + t$ es impar y con la llevada de la suma $q + s$ de las unidades de mil, se convierte en par. Por consiguiente, no es posible.

    b) Sí es posible. Al haber dos dígitos entre el dígito central y los dos de los extremos, se pueden obviar las restricciones del caso anterior. Por ejemplo, la suma de $8072843 + 3482708$ es 11555551 que tiene todos sus dígitos impares.

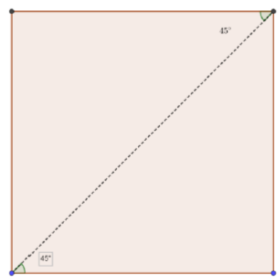
    También resuelto por Dones Colmenárez (Venezuela) y Angel Napa (Brasil).

14. [**1**(2) (2020) p. 141.] Hay que dividir un papel cuadrado en tres partes, mediante dos cortes rectos, de modo que al ubicar estas partes de forma adecuada, sin

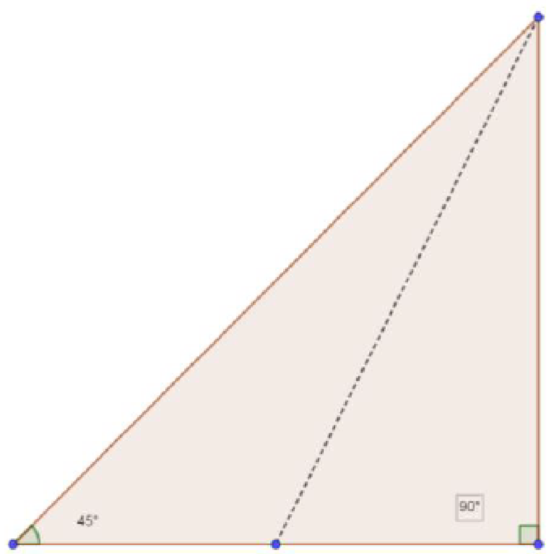
huecos ni superposiciones, se forme un triángulo obtusángulo. Indicar cómo cortar el cuadrado y cómo armar el triángulo con las tres partes.

Solución de José Fermín Berríos Piña, Instituto Pedagógico Rural El Mácaro "Luis Fermín", UPEL, Turmero, Estado Aragua, Venezuela.

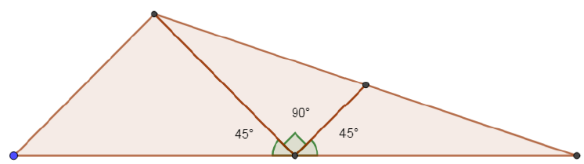
Se traza una de las diagonales y se divide el cuadrado en dos triángulos rectángulos:



Se toma uno de los triángulos rectángulos, se ubica el punto medio de uno de los catetos y se traza la línea de corte desde ese punto al vértice más lejano, quedando dos triángulos, uno de ellos rectángulo y el otro obtusángulo



Para la construcción del triángulo solicitado, se junta uno de los catetos del triángulo del primer corte, con el cateto mayor del segundo triángulo rectángulo, del segundo corte. Para concluir se une el lado más corto del triángulo obtusángulo con el cateto más corto del triángulo rectángulo.



También resuelto por Angel Napa (Brasil).

15. [**1**(2) (2020) p. 141.] Encontrar el menor número entero positivo N de dos o más dígitos que tiene la siguiente propiedad: Si insertamos cualquier dígito no nulo d entre cualesquiera dos dígitos adyacentes de N obtenemos un número que es múltiplo de d.

Solución de Angel Napa, IMPA, Brasil

Sea $N = \overline{a_1 a_2 \cdots a_n}$ un número de $n \geq 2$ dígitos. Definiremos lo siguiente:

$$A_i = \overline{a_1 \cdots a_i},\ B_{n-i} = \overline{a_{i+1} \ldots a_n}$$

Sea $N_{i,d}$ el número obtenido al insertar el dígito d entre los dígitos a_i y a_{i+1} de N, y sea M_i el número obtenido al insertar el dígito 0 entre los dígitos a_i y a_{i+1}.

Observemos que A_i es el número obtenido al escoger los primeros i dígitos de N, mientras que B_{n-i} es obtenido al escoger los últimos $n-i$ dígitos de N. Además, $N_{i,d}$ se puede obtener uniendo los números A_i, d y B_{n-i}, en ese orden, y M_i se obtiene uniendo los números $A_i, 0$ y B_{n-i} en ese orden.

De este modo, por dato del problema se tiene que, para cualquier dígito d no nulo:

$$d | N_{i,d} \iff d | N_{i,d} - d \cdot 10^{n-i} = M_i \quad , \forall 1 \leq i \leq n-1$$

Ahora, como $d|M_i$ para cualquier dígito no nulo, tenemos que:

$$2520 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = \text{mcm}(1, 2, \ldots, 9) | M_i \quad , \forall 1 \leq i \leq n-1$$

En particular, como cualquier M_i tiene exactamente $n+1$ dígitos y todos son al menos 2520, se tiene que

$$n + 1 \geq 4 \to n \geq 3$$

Es sencillo descartar $n = 3$, pues $M_2 = \overline{a_1a_20a_3}$ sería un número de 4 dígitos divisible por 2520, y con la cifra de las decenas igual a 0, el cual no existe. Tenemos que

$$n \geq 4$$

Por otro lado, para $1 \leq i \leq n-2$, los números M_i y M_{i+1} están bien definidos tanto ellos como su resta son divisible por 2520.

$$0 \equiv M_{i+1} - M_i \equiv \overline{(A_{i+1})0(B_{n-i-1})} - \overline{(A_i)0(B_{n-i})}$$

$$\equiv (10^{n-i} \cdot A_{i+1} + B_{n-i-1}) - (10^{n-i} \cdot (10A_i) + B_{n-i})$$

$$\equiv 10^{n-i}(A_{i+1} - 10A_i) - (B_{n-i} - B_{n-i-1}) \equiv 10^{n-i}a_{i+1} - a_{i+1} \cdot 10^{n-i-1}$$

$$\equiv 9 \cdot 10^{n-i-1}a_{i+1}(mod\ 2520)$$

$$\rightarrow 0 \equiv 90 \cdot 10^{n-i-2}a_{i+1}(mod\ 2520)$$

$$\rightarrow 0 \equiv 10^{n-i-2}a_{i+1}(mod\ 28)$$

Reemplazando i con $n-2$ y $n-3$ tenemos:

$$0 \equiv a_{n-1}(mod\ 28) \rightarrow a_{n-1} = 0$$

$$0 \equiv 10a_{n-2}(mod\ 28) \rightarrow 0 \equiv a_{n-2}(mod\ 14) \rightarrow a_{n-2} = 0$$

y, como 10 y 7 son primos entre sí tenemos tambien que:

$$0 \equiv 10^{n-i-2}a_{i+1}(mod\ 28) \rightarrow 0 \equiv a_{i+1}(mod\ 7) \quad \forall 1 \leq i \leq n-2$$

$$a_j \equiv 0(mod\ 7) \quad \forall 2 \leq j \leq n-1$$

Esto nos dice que, a excepción de a_1 y a_n, todos sus dígitos son divisibles por 7. Usando que $a_n = 0$ y que 7 es un divisor de $M_1 = \overline{a_10a_2 \cdots a_n}$, concluimos que a_1 también es divisor de 7 (pues todos los demás dígitos de M_1 son divisibles por 7), y no nulo, así que tenemos:

$$a_1 = 7$$

Por otro lado, como todos los dígitos de N son divisibles por 7 se tiene que

$$a_1, \cdots, a_n \in \{0, 7\}$$

Denotando por c al número de dígitos 7 en N, d a la cantidad de dígitos nulos en N, y analizando módulo 9 en M_1, tenemos que:

$$0 \equiv M_1 \equiv a_1 \cdot 10^n + \sum_{i=2}^{n} a_i \cdot 10^{n-i} \equiv a_1 + a_2 + \cdots + a_n \equiv 7c(mod\ 9) \rightarrow 9|c$$

Como además sabemos que $a_{n-2} = a_{n-1} = a_n = 0$, vemos que

$$n = c + d \geq 9 + 3 = 12$$

Resumiendo lo obtenido, si N es un número que cumple las condiciones del problema, debe tener al menos 12 dígitos, de los cuales los últimos 3 son nulos, y tiene al menos nueve dígitos 7. En particular, se tiene que

$$N \geq 777777777000$$

Veamos que este número en efecto cumple: por lo mencionado al inicio, solo tenemos que verificar que cada úno de los números M_i, con $1 \leq i \leq 11$ son divisibles por 2520. No es difícil notar que, independientemente de la elección de i, M_i es un número de 13 dígitos, con sus últimos tres dígitos nulos, así que es divisible por 1000. Además, como tiene exactamente nueve dígitos 7 y el resto son nulos, analizando módulo 9 se tiene:

$$M_i \equiv 7+7+7+7+7+7+7+7+7+0+0+0+0 \equiv 63 \equiv 0\ (mod\ 9)$$

Y como todos sus dígitos son divisibles por 7, M_i también lo es. Entonces:

$$7, 9, 1000|M_i \rightarrow 2520|mcm(7, 9, 1000)|M_i \quad \forall 1 \leq i \leq 11$$

Concluimos que el menor número con la propiedad mencionada en el problema es 77777777000.

16. [**1**(2) (2020) p. 141.] Determine para qué números enteros $n \geq 3$ es posible encontrar números enteros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tales que $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = 1$ y $a_1 a_2 \cdots a_n$ es un cuadrado perfecto.

Solución de Angel Napa, IMPA, Brasil

Dado $n \geq 3$, consideremos la siguiente secuencia:

$$a_k = 2^k, \forall k \leq n-2,\ a_{n-1} = 2^{n-3} \cdot 3 \text{ y } a_n = 2^{n-2} \cdot 3$$

Claramente

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-2} = 2^{n-3} \cdot 2 < 2^{n-3} \cdot 3 = a_{n-1} < 2a_{n-1} = a_n$$

Por otro lado, recordando cocientes notables tenemos lo siguiente:

$$(1-a)(1+a+\cdots+a^{m-1}) = 1-a^m, \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{a_k} = \frac{1}{3 \cdot 2^{n-2}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-3}} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{2^k}$$

Denotaremos $a = \frac{1}{2}$ para mayor comodidad:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{a^{n-3}}{6} + \frac{a^{n-3}}{3} + \sum_{k=1}^{n-2} a^k = a^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) + a \cdot \sum_{k=1}^{n-2} a^{k-1}$$

$$a^{n-3} \cdot \frac{1}{2} + (1-a)(1+a+\cdots+a^{n-3}) = a^{n-2} + (1-a^{n-2}) = 1$$

Donde en la última línea se usó que $a = 1-a$.

Como n fue arbitrario, concluimos que para cualquier entero positivo $n \geq 3$ existe una secuencia estrictamente creciente de n enteros positivos que cumplen las condiciones del problema.

José Nieto jhnieto@gmail.com
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Jorge Tipe jorgetipe@gmail.com
Instituto de Física y Tecnología de Moscú.