ISSN: 2711-1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 1 No. 1 (2020), pp. 19–37

La Intuición Geométrica en Olimpiadas[1]

María E. Losada

Resumen

Es inconfundible el placer de trabajar con estudiantes motivados, creativos y talentosos. Un ambiente ideal es el de olimpiadas. La sorpresa de encontrar en los estudiantes unas ideas y una elegancia de solución de problemas que se han preparado espcialmente para ellos, es tan gratificante que valida todos los esfuerzos que se invierten en ello.

Este año 2019 no fue la excepción. Enfocándonos solamente en problemas geométricos de la Ronda final de la Olimpiada Colombiana de Matemáticas, presentamos una bella mezcla de problemas, soluciones e intentos de solución. Espero se deleiten tanto como aquellos que tuvimos el privilegio de vivirlo.

Palabras y frases clave: geometría elemental, Teorema del ángulo inscrito, Teorema de Menelao, Teorema de Desargues, Inversión.

Geometric Intuition at the Olympiad level

Abstract

There's an unquestionable pleasure in working with motivated, creative and talented students. The perfect setting for this is the olympiad environment. The surprise of finding in the students solutions ideas and elegance in solving problemas that have benn created especially for them, is so gratifying that it validates all the effort invested in it.

This 2019 was no exception. Focusing only on geometrical problems of the Final Round of the Colombian Mathematics Olympiad, we present a beautiful mix of problems, solutions and solution attempts. I hope you delight in them as much as those of us that had the privilege of living it.

Key words and phrases: Elementary geometry, the isncribed arc theoren, Menelaus' theorem, Desargues Theorem, inversion.

[1] Recibido 25/06/2019. Aceptado 25/08/2019.

DOI: 10.48082/espmat-v01n01a20p02

1 Introducción

En las olimpiadas internacionales de matemáticas los problemas son de matemática elemental en el sentido de que deben ser problemas que se refieren a nociones que se ven o pueden ver en una clase de bachillerato alrededor del mundo. Siguiendo este criterio están divididos en cuatro temas: Álgebra, Combinatoria, Geometría y Teoría de Números.

Por muchos años en la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO, por sus siglas en inglés) la geometría ha sido un tema de debate. Por un lado, están los países que por tener una buena enseñanza de la geometría en el colegio, o por razones diametralmente opuestas, se han dedicado a ser países fuertes en geometría a través del entrenamiento de los equipos. Estos países disfrutan del hecho que hasta hace muy poco, siempre había dos problemas de geometría en los exámenes de la Olimpiada. De otra parte, los países de poca tradición geométrica, cuyos estudiantes han sufrido con la geometría y han sacado doctorados en temas más nuevos como la combinatoria, han tratado de cambiar esta tradición y lo están logrando. Debajo de toda esta polémica está el hecho de que más y más la Geometría de Euclides, en sus múltiples expresiones a través de los siglos, ha dejado de ser un instrumento didáctico en la matemática que se enseña a nivel elemental.

No obstante, la geometría todavía es una gran parte de la IMO y la nueva moda ha sido poner problemas muy difíciles, en todo, pero en general en geometría, para que países que se han especializado en ella y que de pronto no fueran fuertes sin su rol privilegiado en la Olimpiada, no tengan ventaja. Todo esto hace que la geometría necesite ser estudiada aún más en los entrenamientos de olimpiadas ya que muchos estudiantes llegan sin bases y deben aprender mucho. Encima de esto, está la problemática de desarrollar el pensamiento geométrico en el estudiante en poco tiempo.

Como ejemplo de esto tomaremos los problemas que este año pusimos en la final de la Olimpiada Colombiana, un examen muy parecido al de la IMO, en especial porque preparamos para esto problemas inéditos de reto a un nivel internacional. Este año entre los problemas presentados de geometría varios fueron de uno de los nuevos ex-olímpicos, Nicolás de la Hoz, quien siempre prefirió la geometría.

Los problemas de Nicolás incluyen un problema que escogimos porque era difícil y se usó para diferenciar a los estudiantes mejores. Para esto también hubo un problema difícil de combinatoria algebraica. Pero más que todo, los problemas de geometría fueron los que dieron más dificultad a los participantes.

El problema más difícil tenía en su solución ideas de geometría proyectiva, lo cual dio un gran reto en los dos días de entrenamiento antes de la Olimpiada. Este entrenamiento se hace para que las personas que nunca han visto estas nociones puedan por lo menos ver cómo se usan antes de la Olimpiada. El resultado fue que en vez de dar las dos clases que usualmente damos de geometría en este entrenamiento, ¡dimos cuatro! Exploraremos estas nociones en este artículo.

2 Los problemas

1. Sea S un conjunto finito con n puntos en el plano donde no hay tres puntos colineales y tal que si se escogen dos puntos A y B en S, existen puntos C y D en S (no necesariamente diferentes a A y B) tales que $AB \perp CD$. Determine todos los posibles valores de n.

2. Sea ABC un triángulo, Γ su circuncírculo y D un punto sobre BC tal que AD es bisectriz del ángulo BAC. La mediatriz de AD corta a Γ en X y Y. Demostrar que el circuncírculo del triángulo XDY es tangente a BC.

3. Sean S_1, S_2, S_3 tres círculos concéntricos con radios $1, 2$ y 3 respectivamente y centro en O. Sea P un punto sobre S_3 y A_1, A_2 puntos sobre S_1, S_2 respectivamente, tales que PA_1A_2 es un triángulo equilatero. Demostrar que la mediatriz del segmento que une el circuncentro y el ortocentro del triángulo OA_1A_2 pasa por un punto fijo a medida que cambia P.

Nota: Se puede también preguntar por el lugar geométrico del circuncentro y del ortocentro y demostrar que son iguales.

4. Sea ABC un triángulo no isósceles con incentro I y circuncírculo Γ. Sea K_a un punto sobre Γ de modo que $\angle AK_aI = 90°$. Sean A_1, B_1 y C_1 los puntos medios de BC, AC y AB, respectivamente. Sea A_2 el corte de AK_a con B_1C_1. Se definen B_2 y C_2 análogamente. Es decir, sean K_b y K_c puntos sobre Γ de modo que $\angle BK_bI = 90°$ y $\angle CK_cI = 90°$, respectivamente. Entonces B_2 es la intersección de A_1C_1 con BK_b y C_2 es la intersección de A_1B_1 con CK_c. Demostrar que A_2, B_2 y C_2 son colineales.

3 Soluciones

3.1 Problema 1

Este problema se incluyó porque es un problema de combinatoria geométrica. Desafortunadamente, el salto de pensar los puntos sobre una circunferencia fue muy grande para los estudiantes de nivel intermedio.

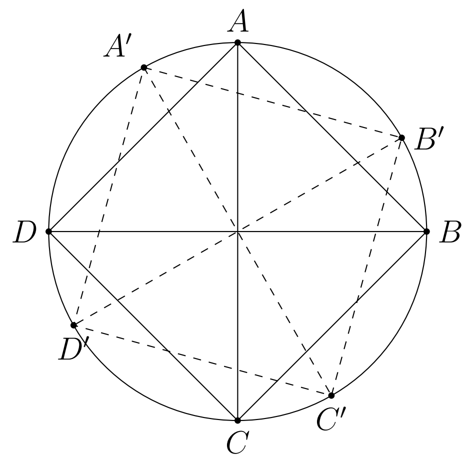

Figura 1: Cuadrado ABCD

Respuesta: n puede ser cualquier entero mayor o igual a 4.

Solución. Para $n = 2$ es claro que no se puede cumplir la condición y para $n = 3$ si los tres puntos son A, B, C y se escogen A y B entonces $AB \perp AC$ o $AB \perp BC$. Supongamos sin perdida de generalidad que $AB \perp AC$ y vemos que si escojo BC no hay recta perpendicular en S perpendicular a BC.

Ahora probamos que para $n \geq 4$ se puede construir un conjunto S.

Consideramos un círculo Γ y un cuadrado $ABCD$ inscrito. Nótese que todo segmento del cuadrado es perpendicular a otro y las diagonales son perpendiculares entonces el conjunto S con los puntos A, B, C, D cumple. Ahora si adicionamos a S otros k cuadrados diferentes e inscritos en Γ vemos que todo punto P en S tiene su diametralmente opuesto P' en S. Entonces si escojo dos puntos P y Q en S tal que Q no es el diametralmente opuesto a P entonces $PQ \perp QP'$. Si $Q = P'$ entonces como adicionamos los puntos por cuadrados la otra diagonal del cuadrado al que pertenecen P y P' es perpendicular a PP'. De donde concluimos todo conjunto con $n = 4 + 4k$ puntos cumple, esto es si n es multiplo de 4.

Si añadimos un punto Q a Γ, solo falta revisar qué pasa si escojo a Q y a otro punto P. Pero como el diametralmente opuesto a P está en S entonces $PQ \perp P'Q$. Por lo tanto si se añade un punto a S sigue cumpliendo. Entonces si $n \geq 4$ y congruente con 1 modulo 4 encontramos un conjunto S que cumple.

Ahora volviendo al cuadrado $ABCD$ si añadimos dos puntos Q y Q' a S donde Q es el punto medio del arco AB y Q' el punto medio del arco CD de modo que $QQ' \perp AB$. Es fácil revisar bajo los parametros anteriores que este conjunto cumple

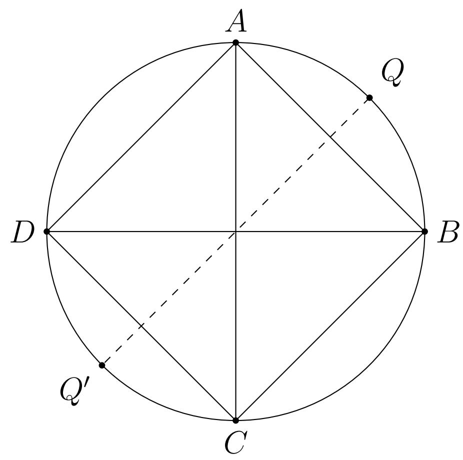

Figura 2: Caso n=6

(Si se escoge solo Q o solo Q' se usa el diametro QQ' para conseguir el ángulo recto y en otro caso ya construimos la perpendicular a QQ'). Por lo tanto seguirá cumpliendo si se añaden k cuadrados inscritos en Γ a S. Luego así se construye el conjunto S para n congruente con 2 modulo 4. Finalmente si se añade a S un punto R cualquiera en este caso sigue cumpliendo y tenemos también los congruentes con 3 modulo 4.

Con esto concluimos que todos los $n \geq 4$ tienen un conjunto S que cumple las condiciones como queríamos demostrar. $\square$

3.2 Problema 2

Se presentan dos soluciones al problema.

3.2.1 Primera solución

Sea E el corte de XY con AC. Primero se tiene que $\frac{\angle BAC}{2} = \angle EAD = \angle EDA$ y entonces

$$\angle EDC = \angle ADC - \angle ADE = \frac{\angle BAC}{2} + \angle ABC - \frac{\angle BAC}{2} = \angle ABC$$

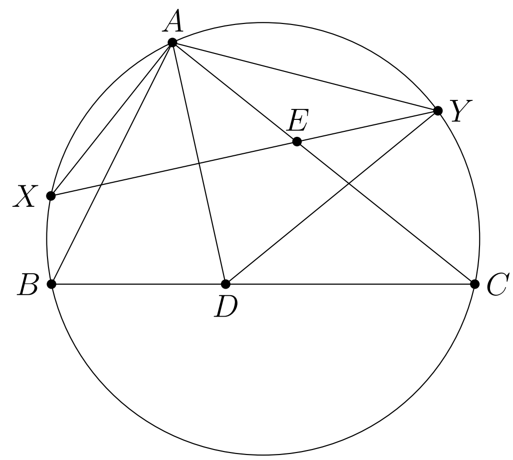

Figura 3: Solución 1

Por simetría con respecto a XY se obtiene que $\angle EDY = \angle EAY = \angle CAY$ y que $\angle AXY = YXD$. Ahora nótese que por el Teorema del ángulo inscrito se tiene:

$$\begin{aligned}\angle YDC &= \angle EDC - \angle EDY = \angle ABC - \angle CAY\\ &= \angle AXC - \angle YXC = \angle AXY = \angle YXD.\end{aligned}$$

Y concluimos que BC es tangente al circuncírculo del $\triangle XYD$ como se quería.

3.2.2 Segunda solución

Sea Z el corte de la tangente por A a Γ con BC. Nótese que usando el Teorema del ángulo semiinscrito:

$$\angle ZAD = \angle ZAB + \angle BAD = \angle ACB + \frac{\angle BAC}{2} = \angle ADB = \angle ADZ$$

De donde concluimos que $ZA = ZD$ y entonces Z, X y Y son colineales. Finalmente nótese que si reflejamos sobre la recta XY se tiene que A se vuelve D, luego Γ se vuelve el circuncírculo del $\triangle XYD$ y la recta ZA se vuelve la recta ZD y se concluye que la recta ZD que es la misma recta BC es tangente al circuncírculo del $\triangle XYD$ como se quería. $\square$

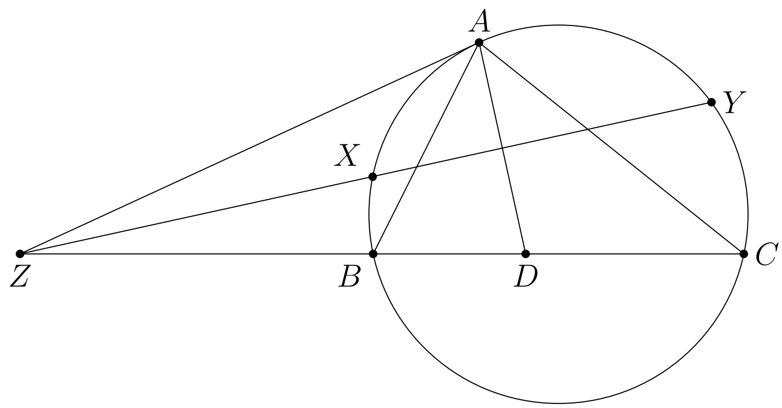

Figura 4: Solución 2

3.2.3 Intentos de solución

No hubo soluciones de este problema de nivel intermedio. El problema original pedía demostrar que BC era tangente al circuncírculo del triángulo XDY. Esto se cambió para saltar un paso a: demostrar que los ángulos $\angle XYB$ y $\angle XDB$ eran iguales. Algunos estudiantes notaron que era equivalente a la tangencia.

Otras cosas importantes que notaron:

- $AX = DX$ y $AY = DY$;
- $\angle XAD = \angle ADX$ y $\angle DAY = \angle YAD$;
- Algunas propiedades de $AD \perp XY$;
- Si se definen los puntos E y F como la intersección de XY con AB y AC, entonces se forman dos triángulos congruentes $\triangle AEP$ y $\triangle AFP$ donde P es el punto de corte de AD y XY.
- $\angle ADB = 180° - (\frac{\angle A}{2} + \angle B) = \frac{\angle A}{2} + \angle C$.
- Si extiende la bisectriz AD corta el círculo en el punto medio del arco $\widehat{BC}$.
- Se extienden los segmentos XD y YD hasta tocar el círculo en X' y Y'. Demostrar que $X'Y' \parallel BC$.

3.2.4 Solución alternativa a partir de una idea y un dibujo de Jorge Ortega

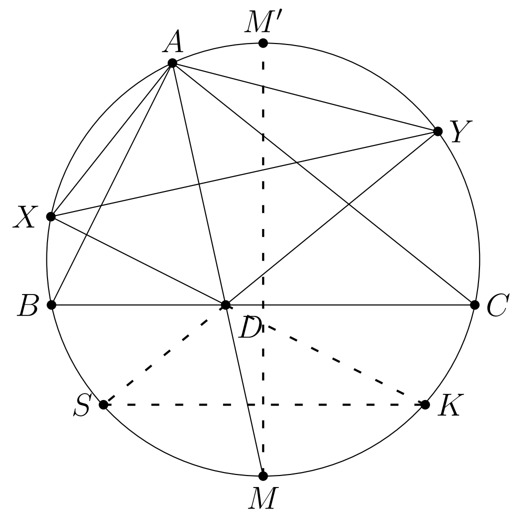

Figura 5: Solución completada

Sean S y K los puntos sobre el círculo Γ obtenidos de prolongar YD y XD, respectivamente. Si se demuestra que SK es paralelo a BC, entonces se termina el problema ya que $\angle XYD = \angle XYS = \angle XKS = \angle XDB$.

Sea M el punto de intersección con Γ de la bisectriz AD, entonces $\widehat{BM} = \widehat{MC}$.

Ahora el $\triangle SDK$ es semejante al $\triangle XDY$ así que su altura se forma al reflejar la recta AM por la bisectriz del ángulo $\angle XDY$ (ya que AM es perpendicular a XY). O sea que el ángulo formado entre esta altura y AM es la diferencia entre los ángulos $\angle ADY$ y $\angle ADX$. Esta diferencia $|\angle ADY - \angle ADX|$ es igual a:

$$|\angle MAY - \angle MAX| = |\angle MM'Y - \angle MM'X| = |\angle CM'Y - \angle BM'X|,$$

en donde M' es la antipodal de M.

Si esta diferencia es igual al ángulo $\angle AMM' = \angle AMO$ en donde O es el centro de Γ, se tiene que BC es paralelo a SK y se termina la demostración del problema.

Bajemos la altura desde A a BC y sea H es el ortocentro del $\triangle ABC$, entonces $\angle AMM' = \angle HAD = \frac{1}{2}\angle HAO = \frac{1}{2}|\angle B - \angle C|$. Pero

$$\frac{1}{2}|\angle B - \angle C| = \frac{1}{2}|\angle AMC - \angle AMB|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}|(\angle CM'Y - \angle BM'X) + (\angle AXY - \angle AYX)| \\
&= \frac{1}{2}|(\angle CM'Y - \angle BM'X) + (90^\circ - \angle MAX - (90^\circ - \angle MAY)| \\
&= \frac{1}{2}|2(\angle CM'Y - \angle BM'X)| \\
&= |\angle ADY - \angle ADX|,
\end{aligned}
$$

como queríamos.

Nota: A esta idea también se aproximaron los estudiantes Manuel del Llano Toro y Tomás Corredor

3.3 Problema 3

Sean S_1, S_2, S_3 tres círculos concéntricos con radios $1, 2$ y 3 respectivamente y centro en O. Sea P un punto sobre S_3 y A_1, A_2 puntos sobre S_1, S_2 respectivamente, tales que PA_1A_2 es un triángulo equilátero. Demostrar que la mediatriz del segmento que une el circuncentro y el ortocentro del triángulo OA_1A_2 pasa por un punto fijo a medida que cambia P.

3.3.1 Solución oficial

Demostraremos que esta mediatriz pasa siempre por O.

Sea l el lado del triángulo equilátero. Nótese que :

$$OP \cdot A_1A_2 = 3l = 1l + 2l = OA_1 \cdot PA_2 + OA_2 \cdot PA_2$$

Luego por el Teorema de Ptolomeo obtenemos que PA_1OA_2 es un cuadrilatero concíclico. Nótese ahora que $\angle A_1OA_2 = 120^\circ$ y como $OA_1 = 1$ y $OA_2 = 2$ concluimos que a medida que P varia los triángulos OA_1A_2 son todos congruentes entre sí.

Sean O_1 y H el circuncírculo y el ortocentro, respectivamente, del triángulo OA_1A_2. Sea M el punto medio de A_1A_2. Es conocido que $2O_1M = OH$. Ahora como O_1 es el centro del equilatero PA_1A_2 se tiene que también es el gravicentro. Entonces $PO_1 = 2O_1M$ y como P pertence al circuncírculo del $\triangle OA_1A_2$ se concluye que $OO_1 = PO_1 = 2O_1M = OH$ y concluimos que O pertencece a la mediatriz de O_1H luego al variar P esta mediatriz siempre pasa por O y terminamos la demostración. □

Nota: Para todo P hay dos parejas de puntos que formal el triángulo equilatero. En cualquier caso siempre se puede escoger una de las dos parejas para que al mover P

el triángulo OA_1A_2 rote con centro en O. Las dos parejas hacen referencia a reflejar el triángulo de modo que en efecto se tienen todos los triángulos OA_1A_2 cuyo vertice con el ángulo de 120° es O.

3.3.2 Solución de Esteban Aparicio

Supongamos que está construido el triángulo $\triangle PA_1A_2$. Si hacemos una rotación con centro en P y ángulo 60° que lleve a A_2 en A_1, entonces el centro de los círculos O se transforma en un punto O' tal que $OP = O'P$ y el triángulo $\triangle POO'$ también es equilátero.

Como $OO' = OP = 3$, entonces O' está sobre el mismo círculo que P. Ahora, la imagen de A_2 bajo la rotación es A_1 que está a una distancia de 1 de O y una distancia de 2 de O'. Es decir, está sobre el segmento OO'. De donde, el ángulo externo del cuadrilátero A_1PA_2O es $\angle PA_1O'$ que es igual a PA_2O por definición de la rotación. Es decir, el cuadrilátero A_1PA_2O es circunscribible. Luego $\angle A_1OA_2 = 120°$.

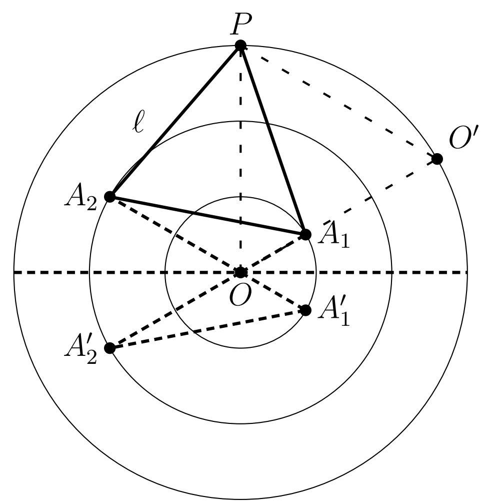

Figura 6: Solución de E. Aparicio

Sea x la bisectriz externa del ángulo $\angle A_1OA_2$. Hacemos una reflexión sobre x y obtenemos el triángulo $\triangle A_1'OA_2'$. Entonces cada uno de los triángulos A_1OA_1' y A_2OA_2' son equiláteros. También OA_1' está sobre la extensión de A_2O y vice versa. De donde la altura desde A_1 en el triángulo $\triangle A_1OA_2$ es la misma altura del triángulo $\triangle A_1OA_1'$. Análogamente, la altura desde A_2 en el triángulo $\triangle A_1OA_2$ es la misma altura del triángulo $\triangle A_2OA_2'$. Entonces el ortocentro H del triángulo $\triangle A_1OA_2$ es el circuncentro C' del triángulo $\triangle A_1'OA_2'$.

Pero H es la imagen del circuncentro C del triángulo $\triangle A_1OA_2$ (que es el mismo del triángulo $\triangle PA_1A_2$) por medio de la reflección. De donde el punto O que está sobre el eje de reflección, o sea que está sobre la mediatriz de CH es fijo para cualquier P.

3.3.3 Intentos de solución

Hubo una solución del estudiante Gregorio Salazar igual a la solución oficial. Otras personas notaron que podían construir nuevos triángulos a partir de rotaciones con centros en O en donde el único punto fijo que quedaba era O y por lo tanto debería ser el punto fijo.

3.4 Problema 4

Se presentan dos soluciones al problema.

3.4.1 Primera solución

Sean X, Y, Z los puntos medios de los arcos BC, AC y AB, respectivamente y M el punto medio de BC. Demostraremos por el Teorema de Menelao sobre el triángulo MNL que A_1, B_1 y C_1 son colineales.

Primero demostramos la siguiente afirmación.

AK_1, YZ y NL concurren: Sean P y Q los cortes de las rectas BY y CZ con NK respectivamente. Luego tenemos que BY y CZ son bisectrices del triángulo ABC luego se cortan en I. Note se que :

$$\angle CQP = \angle QCB = \angle ZCB = \angle ZYP$$

Luego $ZYQP$ es un cuadrilátero concíclico. Tambi'en:

$$\angle LBP = \angle PBC = \angle LPB$$

Luego $AL = BL = PL$ de donde $\angle API = \angle APB = 90°$. Entonces P pertenece al círculo de diametro AI. Análogamente Q pertenece a este círculo y tenemos que A, K_1, P, I, Q pertenecen a un mismo círculo. Finalmente miramos los ejes radicales entre el círculo del $ZYPQ$, el círculo de diametro AI y Γ, los cuales son AK_1, PQ y YZ y por lo tanto concurren en A_1. Análogamente ML y XZ se cortan en B_1 y MN y XY cortan en C_1.

Ahora sea O el centro de Γ. Nótese que ZL y YN se cortan en O. Luego podemos usar el Teorema de Menelao en el triángulo LON con la recta YA_1. De donde obtenemos que:

$$\frac{OY}{NY} \cdot \frac{NA_1}{LA_1} \cdot \frac{LZ}{OZ} = 1 \Rightarrow \frac{NA_1}{LA_1} = \frac{NY}{LZ}$$

De manera análoga y teniendo cuidado con la orientación se obtiene que $\frac{LB_1}{MB_1} = \frac{LZ}{MX}$ y $\frac{MC_1}{NC_1} = \frac{MX}{NY}$ y entonces

$$\frac{NA_1}{LA_1} \cdot \frac{LB_1}{MB_1} \cdot \frac{MC_2}{NC_2} = \frac{NY}{LZ} \cdot \frac{LZ}{MX} \cdot \frac{MX}{NY} = 1$$

y por el Teorema de Menelao concluimos que A_1, B_1 y C_1 son colineales

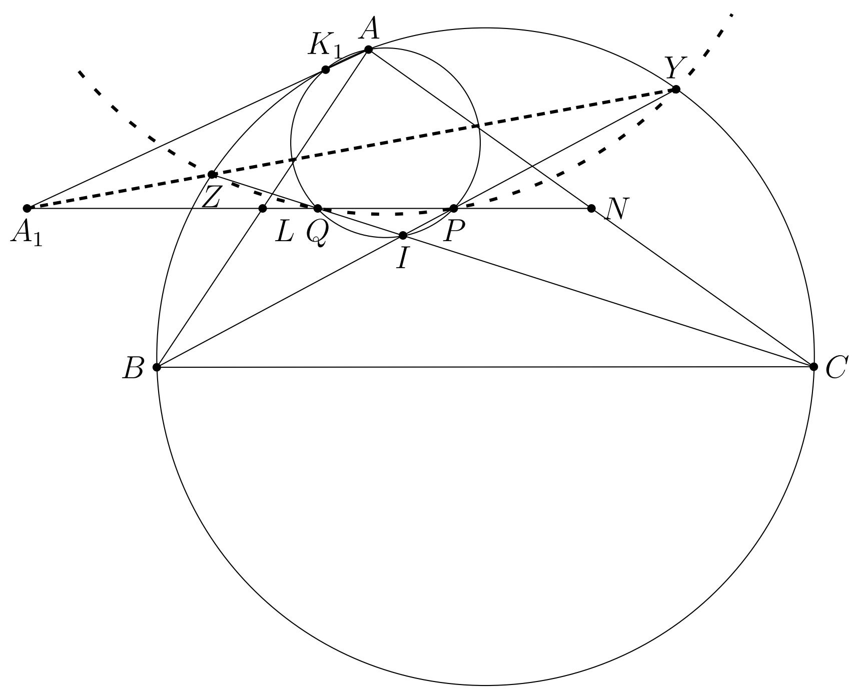

Figura 7: Solución 1

3.4.2 Segunda solución

Sean X, Y, Z los puntos medios de los arcos $\widehat{BC}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AB}$, respectivamente. Demostraremos que los triángulos $\triangle A_1B_1C_1$ y $\triangle XYZ$ son proyectivos desde una recta y esta recta es la que pasa por A_2, B_2 y C_2.

$\triangle A_1B_1C_1$ y el $\triangle XYZ$ son proyectivos desde un punto: Note se que XA_1, YB_1 y ZC_1 son las mediatrices del triángulo ABC luego concurren. Luego por el Teorema de Desargues ambos triángulos son proyectivos desde una recta. Demostraremos que los lados opuestos se cortan en A_2, B_2, C_2 luego estos tres puntos son colineales.

AK_1, YZ y B_1C_1 concurren: Sean P y Q los cortes de las rectas BY y CZ con B_1C_1 respectivamente. Luego tenemos que BY y CZ son bisectrices del triángulo ABC luego se cortan en I. Note se que :

$$\angle CQP = \angle QCB = \angle ZCB = \angle ZYP$$

Luego $ZYQP$ es un cuadrilátero concíclico. También:

$$\angle C_1BP = \angle PBC = \angle C_1PB$$

Luego $AC_1 = BC_1 = PC_1$ de donde $\angle API = \angle APB = 90°$. Luego P pertenece al círculo de diametro AI. Análogamente Q pertenece a este círculo y tenemos que A, K_1, P, I, Q pertenecen a un mismo círculo. Finalmente miramos los ejes radicales entre el círculo del $ZYPQ$, el círculo de diametro AI y Γ, los cuales son AK_1, PQ y YZ y por lo tanto concurren en A_2. Análogamente A_1C_1 y XZ se cortan en B_2 y A_1B_1 y XY cortan en C_2. Luego estos tres puntos son colineales por el Teorema de Desargues como queríamos. $\square$

3.4.3 Intentos de solución

Solo hubo una solución del problema de Gregorio Salazar. Algo que más o menos esperábamos pues se había escogido para diferenciar a los estudiantes buenos. La mayoría de los intentos fueron solamente expresar un Menelao con el triángulo medial, o bajar las perpendiculares a los lados desde el incentro I y mirar el círculo que se forma con A, K_a e I.

Un estudiante se dio cuenta que K_aA era el eje radical de los dos círculos Γ y el círculo anterior. Esteban Aparicio se dió cuenta que era verdad el problema entonces el triángulo formados por los segmentos K_aA, K_bB y K_cC tenía que ser proyectivo desde un punto con el triángulo medial. Este estudiante comenzó a trabajar el cícrulo de diámetro IA pero no llegó más lejos.

Este problema fue creado para aprovechar una proyección que ya existía entre los puntos medios Z, X y Y de los arcos AB, BC y CA, respectivamente, y el triángulo medial y dependía fuertemente del hecho que el triángulo no fuera isósceles. La única solución de los estudiantes fue una muy hermosa por inversión.

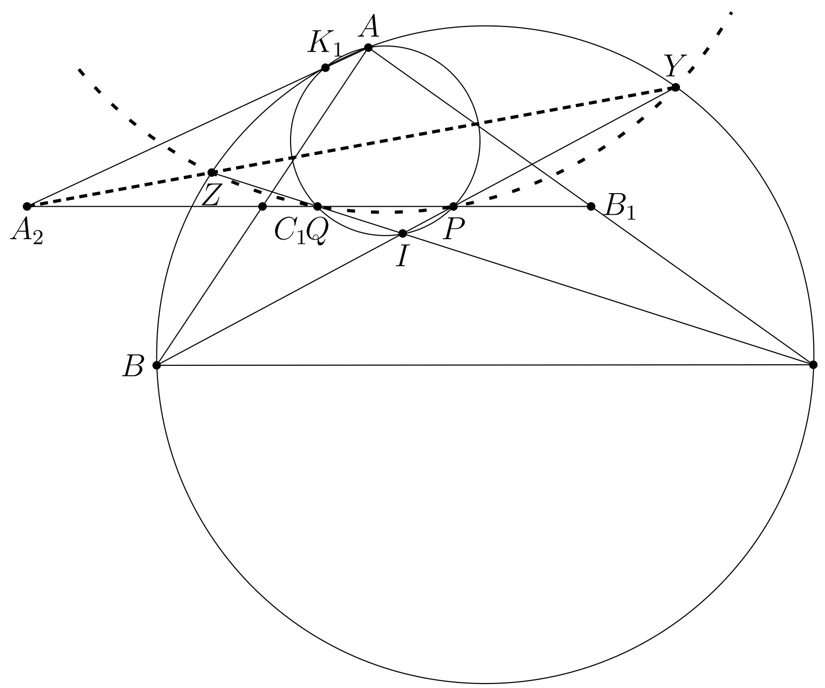

Figura 8: Solución 2

3.4.4 Solución de Gregorio Salazar

A_2, B_2, C_2 son puntos sobre cada uno de los lados del $\triangle A_1B_1C_1$. Entonces basta hacer Menelao

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} \cdot \frac{B_1A_2}{A_2C_1} \cdot \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = -1.$$

Sea $A_3 = AA_2 \cap BC$. Siilarmente B_3 y C_3. Como $C_1B_1 \parallel BC$ entonces

$$\frac{B_1A_2}{A_2C1} = \frac{CA_3}{A_3B}.$$

De donde

$$\frac{A_1C_2}{C_2B_1} \cdot \frac{B_1A_2}{A_2C1} \cdot \frac{C_1B_2}{B_2A_1} = \frac{BC_3}{C_3A} \cdot \frac{CA_3}{A_3B} \cdot \frac{AB_3}{B_3C}.$$

Falta demostrar que A_3, B_3, C_3 son colineales.

Sean D, E, F los pies de las perpendiculares desde I a BC, AC, AB, respectivamente, $ID = IF = IE = r$, el inradio. De donde A, K_A, F, I, E son concíclicos sobre un círculo Ω_A. Definimos de la misma manera Ω_B y Ω_C. Invertamos sobre el incículo.

D, E, F se mantienen fijos. Ω_A, Ω_B y Ω_C se transforman en EF, FD y DE, respectivamente. $A' = EF \cap AI$ es la imagen de A bajo la inversión y es perpendicular a DE lo cual lo hace su punto medio. Γ se transforma en el circuncírculo de $A'B'C'$ o el círculo de los 9 puntos de $\triangle DEF$. Como K_A está sobre Γ y se transforma sobre EF y el círculo de los 9 puntos de DEF, debe ser el pie de la altura desde D a EF.

Ahora, BC pasa a ser un círculo tangente al círculo de inversión que pasa por I y por D y tiene diámetro ID. Además AK_A se transforma en un círculo que pasa por A', K'_A e I. De donde A'_3 es el otro punto de interseccín de estos dos círculos.

Queremos demostrar que I, A'_3, B'_3, C'_3 son concíclicos. Ahora $\angle IA'_3D = 90^\circ = \angle IA'_3K'_A = \angle IA'K'_A$ de donde D, A'_3 y K'_A son colineales. Sea H' el ortocentro de DEF entonces $\angle IA'_3H = 90^\circ$ de donde A'_3 está sobre el circuncírculo de diámetro IH'. Lo mismo sucede con B'_3 y C'_3. Que era lo que queríamos demostar. $\square$

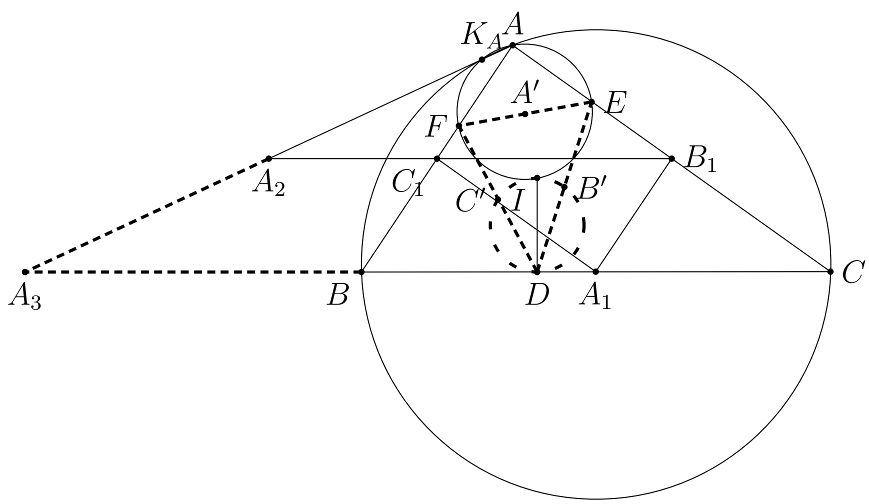

Figura 9: Solución de G. Salazar

4 La venganza Olímpica

La venganza olímpica es un invento de los estudiantes de Brasil quienes sintieron que era justo que si los profesores o entrenadores les ponían problemas para resolver en poco tiempo, entonces los profesores también deberían poder o tener que resolver problemas en poco tiempo. El conjunto de los problemas que resuelven los profesores se llaman la venganza olímpica y son escogidos por los estudiantes.

Este año aquí en Colombia tuvimos nuestra primera venganza olímpica. En el primer examen el problema de geometría fue:

Dados los puntos A, B, C, I, K_A y el círculo Γ definidos en el problema anterior (en realidad K_A no se definió sino como la intersección de Γ y Ω, el círculo con diámetro AI). Sean D el pie de la perpendicular a BC desde I y J el punto de intersección de AI con el círculo Γ. Demostrar que K_A, D y J son colineales.

Solución.

Como K_A está sobre el circuncírculo y J es el punto medio del arco BC, lo que queremos demostrar es que KD es la bisectriz del ángulo BK_AC. Es decir, por el Teorema de la bisectriz, que

$$\frac{K_AB}{K_AC} = \frac{BD}{BC}.$$

Sabemos que $BD = BF$ y $CD = CE$ porque son tangentes al incírculo. Entonces queremos demostrar que

$$\frac{K_AB}{BF} = \frac{K_AC}{CE}.$$

Lo cual, dado que $\angle K_ABF = \angle K_ACE$ por inscribir en el circuncírculo el arco K_AA, es lo mismo que decir que los triángulos K_ABF y K_ACE son semejantes. Pero esto es claro ya que el complemeto de los ángulos $\angle BFK_A$ y $\angle CEK_A$ determinan el mismo arco AK_A en el círculo de diámetro AI.

Solución de María usando la inversión de Gregorio, la anti-venganza.

De nuevo usaremos la inversión de Gregorio con centro en I para transformar estos puntos que deben ser colineales en puntos concíclicos con I.

Si invertimos en el círculo de centro I y diámetro ID entonces los pies de las perpendiculares desde I hasta AB y AC, llamémoslos F y E, respectivamente, que están sobre Ω, el círculo de diámetro AI, y también sobre el círculo de inversión, se mantienen fijos. Es decir, el cŕculo Ω se transforma en la recta EF como vimos en la solución de Gregorio. Es más, también ahí se comenta que A se transforma en el punto medio A' de EF y K_A se transforma en K el pie de la perpendicular desde D (también un punto fijo) a EF.

Esto último es debido a que A, B, C y K_A que están sobre Γ van a transformarse sobre un círculo Γ' que pasa por los puntos medios de los lados del triángulo $\triangle DEF$, que es su círculo de los 9 puntos, y el único otro punto de este círculo sobre el segmento EF es K, el pie de la altura desde D.

Miremos mejor este círculo de los 9 puntos Γ' de DEF. I es el circuncentro de DEF por lo tanto el centro de Γ' está a igual distancia de I que del ortocentro H de DEF. Además $DH = 2IA'$ y son paralelos, así que el otro de los 9 puntos L sobre Γ' que está sobre la altura DK es tal que $DL = IA'$ y son paralelos.

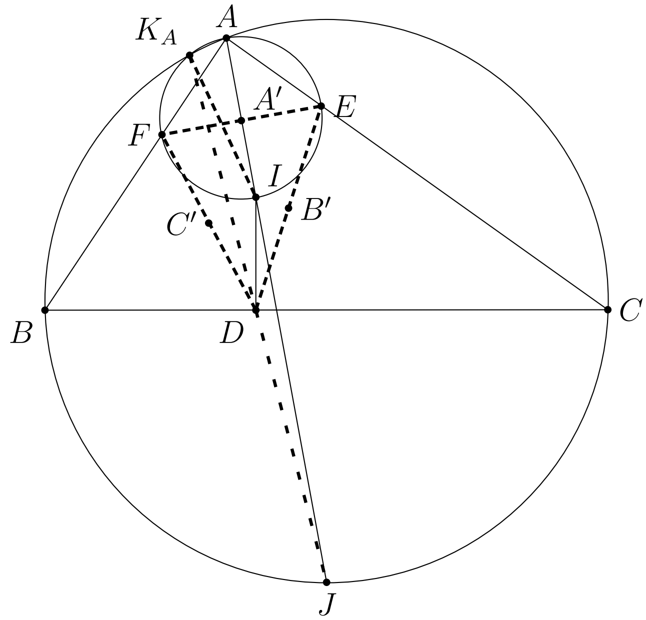

Figura 10: Solución de María

Ahora veamos donde se transforma el punto J. Como J está sobre AI que pasa por el centro de inversión I, su imagen se transforma en un punto J' también sobre AI que es igual que $A'I$. Es decir, J' está sobre la mediatriz de EF. También por estar J sobre Γ entonces J' está sobre Γ'. Ahora como $HK \parallel A'I$ y el centro de Γ' está sobre la mediatriz de KA', entonces $J'L \parallel KA'$. Es más $J'LKA'$ es un rectángulo.

Solo queda notar que $DKIJ'$ es un trapecio isósceles y por ende circunscribible. Para eso notemos que los triángulos $\triangle KA'I$ y $\triangle J'LD$ son congruentes pues tienen dos de sus lados paralelos e iguales. De donde en particular $KI = J'D$ y siendo que $DK \parallel IJ'$, $DKIJ'$ es un trapecio isósceles.

5 Conclusiones

En olimpiadas no solamente esperamos encontrar soluciones de problemas y calificarlos, sino tenemos que hacer la tarea de completar los intentos de solución para poder tener una idea de cuánto puntaje otorgar a una buena idea que no fue desarrollada hasta el final.

En este artículo se presenta un ejemplo de ello que permite que la autora también

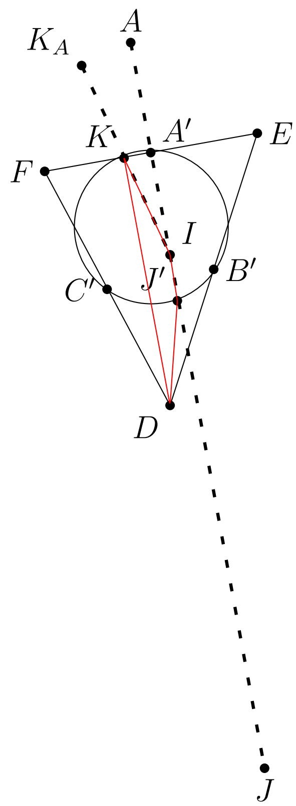

Figura 11: Solución de Maria

contribuya al artículo matemáticamente.

Es una idea jueguetona de los estudiantes preparar una venganza olímpica. Pero el sentido detrás es importante: mantener competitivos y corrientes a los entrenadores. Para la autora fue un placer poder resolver su venganza con un método de solución utilizado genialmente por un alumno en la olimpiada. Es un excelente ejemplo de como la matemática se distingue del arte cuando el que lo aprecia tiene que también trabajarla además de asimilarla para llegar a su profundidad.

6 Agradecimientos

Es importante reconocer a todos los olímpicos que han pasado por olimpiadas y constribuido con su creatividad e ingenio, que nos dejan muchas veces con la boca

abierta.

Este año quiero resaltar en especial la colaboración de Nicolás de la Hoz. La increíble imaginación de Esteban Aparicio. Y la destreza matemática de Gregorio Salazar. Falta por mencionar el problema de la venganza olímpica creado por Martín Díaz.

Referencias

[1] Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S., *Geometry Revisited*, Random House, 1967.

María E. Losada (director.olimpiada@uan.edu.co)
Universidad Antonio Nariño
Bogotá, Colombia