# El árbol de Stern - Brocot[1]

Fabiola Czwienczek Miler

## Resumen

En el presente artículo se narra una conversación imaginaria entre la autora y su imaginario tío Pedro. El tema de esta conversación es la construcción de un árbol binario a partir de fracciones mediantes, bautizado con los apellidos del matemático alemán Moritz Stern y del relojero y matemático aficionado francés Achille Brocot. En su exposición sobre el árbol de Stern-Brocot el tío Pedro nos explica qué es la fracción mediante y nos proporciona algunos datos históricos sobre cómo el matemático Nicolás Chuquet la utilizaba para resolver ecuaciones. Finalmente , demuestra que en este árbol aparece toda fracción positiva e irreducible exactamente una vez.

**Palabras y frases clave:** árbol de Stern-Brocot, fracción mediante, ecuaciones.

## The Stern – Brocot tree

### Abstract

The present paper narrates an imaginary conversation between the author and her imaginary uncle Pedro. The subject of this conversation is the construction of a binary tree from mediant fractions, baptized with the last names of the german mathematician Moritz Stern and the french clockmaker and amateur mathematician Achille Brocot. In his exposition on the Stern-Brocot tree, uncle Pedro explains what the mediant fraction is and exposes some historical data about how the mathematician Nicolás Chuquet used it to solve equations. Finally, he proves that in this tree each positive and irreducible fraction appears exactly once.

***Key words and phrases:*** Stern-Brocot tree, mediant fraction, equations.

---

Una tarde de agosto fui a visitar a mi tío Pedro (sí, el que es profesor de Matemática) y lo encontré absorto ante la pizarra que tenía instalada en su biblioteca. Con los brazos en jarra, la tiza en la mano derecha y el borrador en la izquierda, estaba parado a una distancia de la

[1] Recibido 20/05/2019. Aceptado 20/07/2019.

 DOI: 10.48082/espmat-v01n01a20p03

pizarra que le permitía tener una visión completa de lo que había escrito. Tan concentrado estaba en su trabajo que no notó mi presencia. No era la primera vez que esto ocurría y, como siempre, decidí no interrumpirle. ¿Qué tendría tan ocupado hoy al tío Pedro? Eché un vistazo a la pizarra y logré ver varios renglones de fracciones, intercaladas unas debajo de otras, conectadas con líneas. Por la forma en que estaban dispuestas y conectadas estas fracciones se trataba de un árbol binario, sin duda alguna. Además del árbol, una serie de desigualdades y ecuaciones, así como cálculos diversos, complementaban una superficie repleta de maravillosas expresiones matemáticas.

El tío Pedro seguía observando su pizarra. Me parecía que escudriñaba cada palabra, cada símbolo, cada número que había escrito. Que repasaba cada operación, cada sustitución, buscando relaciones y patrones que luego materializaría en una fórmula, en un teorema, ¿quién sabe? De repente, se llevó la mano derecha a la barbilla y, como si le estuviera susurrando a la tiza lo que iba a escribir, dijo algo que no escuché. Se acercó rápidamente a la pizarra y en el último rincón en el que quedaba espacio, escribió su hallazgo. Ahora sí me atreví a saludarlo.

- Hola tío. ¿Cómo estás? – me acerqué para abrazarlo.

- ¡Caramba! Si aquí está mi sobrina favorita, la única que sigue mis pasos. No me di cuenta que habías llegado.

- Nada raro, cuando estás concentrado en algún asunto matemático difícilmente miras a los lados. Oye, tío, se ve muy interesante este árbol, ¿de qué se trata?

- Ya te lo explico. Empecemos por el principio.

Borró la pizarra y comenzó su exposición. Escribió en la parte superior derecha, a manera de título: *La fracción mediante.*

- Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones, con $b>0$ y $d>0$. La fracción $\frac{a+c}{b+d}$ se denomina *fracción mediante* de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Por ejemplo, la fracción mediante de $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$ es $\frac{5}{8}$, mientras que la fracción mediante de $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{2}$ es $\frac{4}{7}$, la de $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ es $\frac{2}{5}$, …

- Un momento, tío ¿me estás diciendo que la fracción $\frac{a+c}{b+d}$, cuyo numerador es la suma de los numeradores de las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ y cuyo denominador es la suma de los denominadores de esas fracciones, la fracción que es el ícono de uno de los errores más comunes de las matemáticas elementales, esa fracción tiene nombre propio?

- Pues sí, tiene nombre propio, así como propiedades, historia y aplicaciones muy interesantes. Hace poco se publicó un libro dedicado a la fracción mediante.

Mi tío se dirigió hacia su escritorio y me trajo el libro titulado *A motif of Mathematics,* cuyo autor es Scott B. Guthery. El subtítulo del libro es muy claro respecto a su contenido: *History and Application of the Mediant and theFarey Sequence.* Continuando con su exposición, siguió escribiendo.

- La propiedad más relevante de la fracción mediante $\frac{a+c}{b+d}$es que se encuentra entre las fracciones dadas. Supongamos que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Por tanto, $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow \frac{bc-ad}{bd} > 0$. Como b y d son positivos, tenemos que $bc - ad > 0$. Observemos que:

  $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$

  Análogamente, se prueba que $\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} > 0$

  Hemos demostrado que si $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

- Esta propiedad nos asegura que la fracción mediante pertenece al intervalo cuyos extremos son las fracciones dadas. Me pregunto, ¿podrá en algún caso coincidir la fracción mediante con el punto medio de dicho intervalo?

- Veamos. Para que la fracción mediante $\frac{a+c}{b+d}$ coincida con el punto medio del intervalo $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, debe ocurrir que $\frac{a+c}{b+d}$ equidiste de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$. Acabamos de calcular la distancia entre $\frac{a+c}{b+d}$ y $\frac{a}{b}$, la cual es $\frac{bc-ad}{b(b+d)}$. La otra distancia es $\frac{bc-ad}{d(b+d)}$. Tendremos la ecuación

  $$\frac{bc-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{d(b+d)}$$

  Como $bc - ad$ y $b + d$ son no nulos, obtenemos $\frac{1}{b} = \frac{1}{d}$. Esto es, $b = d$. Recíprocamente, si $b = d$, entonces las distancias entre la fracción mediante y los extremos del intervalo son iguales.

- Por tanto, si los denominadores son diferentes, la fracción mediante estará más cerca de uno de los dos extremos. Ahora que me fijo bien, me doy cuenta que las distancias a los extremos son expresiones que tienen el mismo numerador. Aquella que tenga mayor denominador será la menor. Es decir, la mediante está más cerca de la fracción de mayor denominador.

- Buena observación. Concluimos que dados $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, con b y d positivos, se tiene que la fracción mediante $\frac{a+c}{b+d}$:

i) equidista de $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, si $b = d$

ii) está más próxima a $\frac{a}{b}$, si $b > d$

iii) está más próxima a $\frac{c}{d}$, si $d > b$

Tras un momento de silencio, mi tío tomó el libro de Guthery. Pasó las páginas rápidamente y se detuvo en la que tenía intercalado un pequeño trozo de papel en el que había escrito notas con una letra sólo comprensible para él.

- Ahora te comentaré algo sobre la historia de la fracción mediante. El primer libro en el cual se expone con claridad y se explica la aplicación práctica de la fracción mediante se titula *Le Triparty en la science des nombres*, escrito por el matemático francés Nicolás Chuquet, quien vivió entre 1445 y 1488. Estuve buscando otras referencias de este libro. Resulta que es considerado el texto más antiguo sobre álgebra en francés, dado que fue escrito entre 1480 y 1484. Lamentablemente, el manuscrito de *Le Triparty* no llegó a publicarse mientras Chuquet estaba vivo, sólo circularon copias entre algunos de sus discípulos y, finalmente, se dio por perdido. En 1880 fue hallado en la Biblioteca Nacional de París y en 1881 salió a la luz una versión impresa. Concretamente, Chuquet enuncia en *Le Triparty* la denominada *regla de los valores intermedios*. Aquí, en el libro de Guthery, hay una traducción del francés al inglés de esta regla. Ven, acércate, para que la leas. Acá, al final de la página 14.

- Y voy traduciendo del inglés: "Esta regla sirve para encontrar números intermedios entre números vecinos, tantos como se quiera. Con ella es posible encontrar muchos más números y realizar más cálculos que con la regla de tres o con la de una posición o dos posiciones. Y para comprender y conocer cómo aplicar esta regla, uno debería saber que $\frac{1}{2}$ es la primera y el comienzo entre las fracciones y de ella surgen dos progresiones naturales, una de las cuales sigue en forma creciente, como $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, etc. y la otra en forma decreciente como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, etc. Entendidas estas cosas, se aplica la regla. Numerador se suma a numerador y denominador a denominador"...

Detuve la lectura en voz alta y seguí leyendo silenciosamente. Me puse a hojear el libro. Realmente, se veía muy interesante. El tío Pedro me leyó el pensamiento y dijo:

- Te voy a prestar el libro para que lo analices con detenimiento, pero por el momento te contaré lo siguiente: Chuquet era un algorista, una persona que cultivaba el arte de los algoritmos. Su trabajo era realizar cómputos. Para resolver problemas en los que requería hallar la solución de una ecuación en una variable necesitaba aplicar procedimientos iterativos y mientras más simples y eficaces, mejor. Utilizar la fracción mediante en sus algoritmos le proporcionaba simplicidad y rapidez.

- Entonces Chuquet resolvía ecuaciones por métodos numéricos. ¿Cómo aplicaba la fracción mediante en ellos?

- Te lo explicaré utilizando algunas notaciones y terminologías actuales. Para resolver una ecuación en una variable, Chuquet aplicaba el siguiente algoritmo: comenzaba por determinar dos fracciones: una que denotaremos por $f_1$ que fuese una aproximación por defecto a la solución buscada. Y la otra fracción $f_2$ que fuese una aproximación por exceso. La solución de la ecuación se encontraría en el intervalo $(f_1, f_2)$. Luego, calculaba la fracción mediante $f_m$ de estas fracciones. Si la mediante $f_m$ satisfacía la ecuación, terminaba el proceso, toda vez que habría hallado la solución. Pero, ¿y si no satisfacía la ecuación? Bueno, si la mediante $f_m$ era una aproximación por defecto, entonces sustituía $f_1$ por $f_m$, toda vez que ahora la solución se encontraría en el intervalo $(f_m, f_2)$. Y si la mediante $f_m$ era una aproximación por exceso, entonces sustituía $f_2$ por $f_m$, ya que la solución se encontraría en el intervalo $(f_1, f_m)$. Y con estas nuevas $f_1$ y $f_2$ repetía el procedimiento, calculando de nuevo la mediante, etc., etc., etc. Concluía cuando obtenía la solución o una aproximación a la misma tan cercana como deseara.

Acercándose a la pizarra y con calculadora en mano, mi tío siguió explicando.

- Podemos aplicar este algoritmo para hallar aproximaciones racionales a números irracionales. Por ejemplo, para hallar $\sqrt{3}$ con cuatro decimales, observemos que este número es la raíz positiva de la ecuación $x^2 = 3$. Notemos que $\left(\frac{1}{1}\right)^2 = 1 < 3$, en tanto que $\left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4 > 3$. Hagamos $f_1 = \frac{1}{1}$ y $f_2 = \frac{2}{1}$ Tenemos, así, que $f_1$ es una aproximación a $\sqrt{3}$ por defecto, mientras que $f_2$ lo es por exceso. La mediante $f_m$ de $f_1$ y $f_2$ es $f_m = \frac{3}{2}$ . Tenemos que $f_m^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,2500 < 3$. Como $f_m = \frac{3}{2}$ no es solución de la ecuación dada y es una aproximación por defecto, hacemos $f_1 = \frac{3}{2}$ y repetiremos el procedimiento. Calculamos ahora la mediante de $f_1 = \frac{3}{2}$ y $f_2 = \frac{2}{1}$ , la cual es $f_m = \frac{5}{3}$ . Notemos que $f_m^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} = 2{,}7777$. Puesto que $f_m = \frac{5}{3}$ no es solución de la ecuación dada y es una aproximación por defecto, hacemos $f_1 = \frac{5}{3}$ y repetiremos el procedimiento. Podemos escribir los resultados en una tabla como la siguiente:

| Paso | $f_1$ | $f_m$ | $f_2$ | $f_m^2$ | Tipo de aproximación de $f_m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{1}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{9}{4} = 2{,}2500$ | Por defecto |
| 2 | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{25}{9} = 2{,}7777$ | Por defecto |
| 3 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{49}{16} = 3{,}0625$ | Por exceso |
| 4 | $\frac{5}{3}$ | $\frac{12}{7}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{144}{49} = 2{,}9387$ | Por defecto |
| 5 | $\frac{12}{7}$ | $\frac{19}{11}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{361}{121} = 2{,}9834$ | Por defecto |
| 6 | $\frac{19}{11}$ | $\frac{26}{15}$ | $\frac{7}{4}$ | $\frac{676}{225} = 3{,}0044$ | Por exceso |
| 7 | $\frac{19}{11}$ | $\frac{45}{26}$ | $\frac{26}{15}$ | $\frac{2025}{676} = 2{,}9955$ | Por defecto |
| 8 | $\frac{45}{26}$ | $\frac{71}{41}$ | $\frac{26}{15}$ | $\frac{5041}{1681} = 2{,}9988$ | Por defecto |
| 9 | $\frac{71}{41}$ | $\frac{97}{56}$ | $\frac{26}{15}$ | $\frac{9409}{3136} = 3{,}0003$ | Por exceso |
| 10 | $\frac{71}{41}$ | $\frac{168}{97}$ | $\frac{97}{56}$ | $\frac{5041}{1681} = 2{,}9988$ | Por defecto |
| 11 | $\frac{168}{97}$ | $\frac{265}{153}$ | $\frac{97}{56}$ | $\frac{70225}{23409} = 2{,}9999$ | Por defecto |
| 12 | $\frac{265}{153}$ | $\frac{362}{209}$ | $\frac{97}{56}$ | $\frac{131044}{43681} = 3{,}0000$ | |

Por tanto, la fracción mediante obtenida en el paso 12, a saber $\frac{362}{209}$ , proporciona hasta cuatro cifras decimales de $\sqrt{3}$.

- Muy bien, ya entendí la aplicación práctica de la mediante en el algoritmo enunciado por Chuquet. pero ¿qué hay del árbol de fracciones que vi al llegar?

- ¡Ah! Sí, el árbol. Ese árbol tiene nombre. Se denomina *Árbol de Stern – Brocot*

Escribió estos nombres con letras mayúsculas en la pizarra y hasta los subrayó. Continuó explicando.

- Es una forma de organizar las fracciones mediantes que se van obteniendo a partir de dos fracciones iniciales. Antes de presentarte formalmente ese árbol, construiremos otro. Si tomamos como fracciones iniciales $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, la mediante de estas fracciones es $\frac{1}{2}$. Como sabemos, $\frac{0}{1}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}$. Decimos que $\frac{0}{1}$ es el ancestro inmediato de $\frac{1}{2}$ por la izquierda, mientras que $\frac{1}{1}$ es el ancestro inmediato de $\frac{1}{2}$ por la derecha. Si intercalamos, ahora, las respectivas fracciones mediantes entre $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{2}$ y entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{1}$, las cuales son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, respectivamente, tendremos $\frac{0}{1}<\mathbf{\frac{1}{3}}<\frac{1}{2}<\mathbf{\frac{2}{3}}<\frac{1}{1}$. Así, $\frac{0}{1}$ es el ancestro inmediato de $\frac{1}{3}$ por la izquierda y $\frac{1}{2}$ es el ancestro inmediato de $\frac{1}{3}$ por la derecha. ¿Cuáles son los ancestros inmediatos de $\frac{2}{3}$?

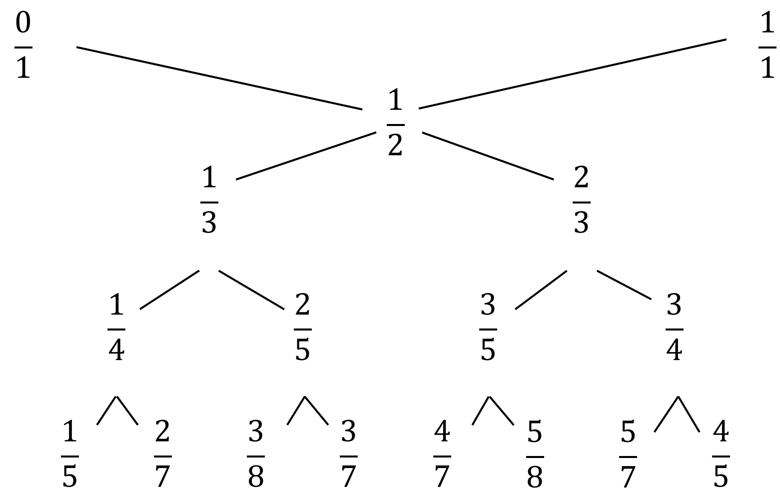
- Por la izquierda es $\frac{1}{2}$ y por la derecha es $\frac{1}{1}$.

- Muy bien. Sigamos intercalando fracciones mediantes. Tendremos nuevas cadenas de fracciones consecutivas

$$\frac{0}{1}<\mathbf{\frac{1}{4}}<\frac{1}{3}<\mathbf{\frac{2}{5}}<\frac{1}{2}<\mathbf{\frac{3}{5}}<\frac{2}{3}<\mathbf{\frac{3}{4}}<\frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}<\mathbf{\frac{1}{5}}<\frac{1}{4}<\mathbf{\frac{2}{7}}<\frac{1}{3}<\mathbf{\frac{3}{8}}<\frac{2}{5}<\mathbf{\frac{3}{7}}<\frac{1}{2}<\mathbf{\frac{4}{7}}<\frac{3}{5}<\mathbf{\frac{5}{8}}<\frac{2}{3}<\mathbf{\frac{5}{7}}<\frac{3}{4}<\mathbf{\frac{4}{5}}<\frac{1}{1}$$

En cada paso se han ido agregando una, dos, cuatro y ocho fracciones mediantes, las cuales son descendientes de dos ancestros. Como en la siguiente iteración cada mediante genera dos nuevos descendientes: uno a la izquierda, generado con su ancestro inmediato por la izquierda y otro a la derecha, generado con su ancestro inmediato por la derecha, tenemos que estos resultados se pueden organizar en forma de árbol de la siguiente manera:



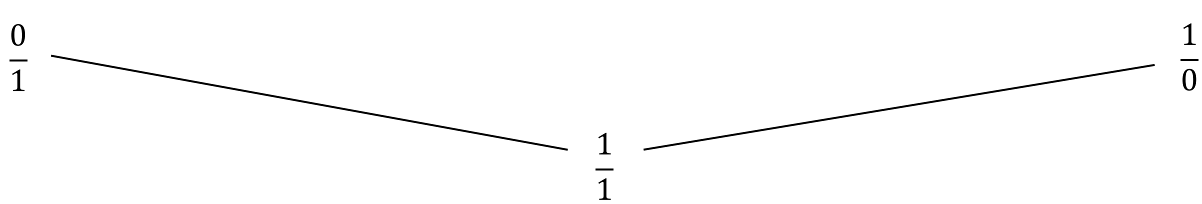

Podemos continuar calculando fracciones mediantes y ampliando este árbol, tanto como queramos, obteniendo siempre fracciones que se encuentran en el intervalo $[0,1]$,ordenadas estrictamente de menor a mayor. Ahora bien, para construir el *Árbol de Stern – Brocot,* en lugar de elegir como fracciones iniciales $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$, elegimos $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$, entonces…

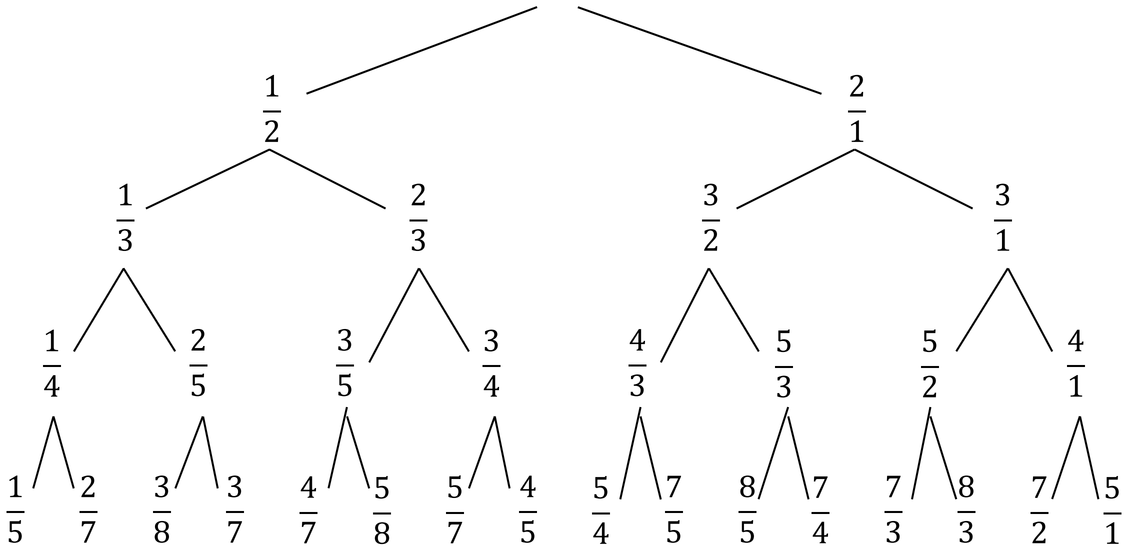
- Un momento, un momento, tío ¿qué es eso de $\frac{1}{0}$?

- No estoy inventando nada, así está en la literatura matemática. Sé que causa disonancia, quizás por eso en algunos libros, en este contexto, aparecen comentarios graciosos respecto $\frac{1}{0}$ como para aminorar el impacto. Por ejemplo, en el libro *Concrete Mathematics* de Graham dicen suponer que $\frac{1}{0}$ es infinito en términos irreducibles.

- Entonces…

- Decía que tomando como "fracciones" iniciales a$\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$ y calculando las mediantes sucesivamente, tendremos el *Árbol de Stern- Brocot*, después de cinco iteraciones,con el siguiente aspecto






Las fracciones así generadas tienen unas propiedades muy interesantes. Fíjate que si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones consecutivas en cualquier etapa de la construcción, con $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces se cumple que $bc - ad = 1$.

- A ver, déjame familiarizarme con la propiedad: $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$ son consecutivas, considerando la primera etapa de la construcción, y se cumple que $1x1 - 0x1 = 1$; en la quinta etapa: $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{7}$ son consecutivas y se cumple $3x5 - 2x7 = 1$; $\frac{8}{5}$ y $\frac{5}{3}$ son consecutivas y $5x5 - 8x3 = 1$. Bien, ahora a la demostración.

- La demostración es muy sencilla. En primer lugar, vemos que la propiedad se verifica para las fracciones iniciales ya que $1x1 - 0x0 = 1$. Supongamos que las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son consecutivas en una determinada etapa y que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Asumamos que se cumple que $bc - ad = 1$. Al insertar la fracción mediante $\frac{a+c}{b+d}$, tenemos que las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a+c}{b+d}$ son consecutivas, al igual que lo son $\frac{a+c}{b+d}$ y $\frac{c}{d}$ y sabemos que $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Debemos probar que $b(a+c) - a(b+d) = 1$y $c(b+d) - d(a+c) = 1$. En efecto:

  $b(a+c) - a(b+d) = ab + bc - ab - ad = bc - ad = 1.$

  $c(b+d) - d(a+c) = bc + cd - ad - cd = bc - ad = 1.$

La pizarra ya estaba repleta. El tío Pedro borró los cálculos, pero no borró los árboles. Seguidamente me preguntó:

- ¿Te has dado cuenta que hemos calculado una buena cantidad de fracciones mediantes en lo que va de esta tarde y todas han resultado ser irreducibles?

Me quedé callada repasando con la mirada cada fracción y maravillándome: era verdad, cualquier fracción que mirara en ese árbol y en el anterior, incluso las que obtuvimos en la tabla de aproximación a$\sqrt{3}$ , era irreducible.

- Es cierto, tío, hasta ahora no nos hemos topado con alguna fracción mediante que no fuese irreducible.

- Ni nos toparemos.

- ¿Por qué?

- El detalle está en la propiedad que acabamos de demostrar. ¿No lo ves?

- Déjame pensar un momento. Bueno, sabemos que una fracción es irreducible si el máximo común divisor de su numerador y denominador es 1, lo que equivale a decir que su numerador y denominador son primos relativos.

- ¿Y no habrá por ahí alguna identidad que caracterice a dos enteros primos relativos?

- Bezout, la identidad de Bezout – dije repentinamente. ¡Por supuesto!. Construimos el primer árbol partiendo de las fracciones $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{1}$ y el segundo, a partir de $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$. Iniciamos el algoritmo de aproximación a $\sqrt{3}$ con las fracciones $\frac{1}{1}$ y $\frac{2}{1}$. En cada caso, las fracciones iniciales satisfacen la igualdad $bc - ad = 1.$ Ahora bien, si tomamos cualquier fracción $\frac{x}{y}$del árbol que no sea alguna de las iniciales, siempre existe una fracción $\frac{m}{n}$ tal que $\frac{m}{n}$ y $\frac{x}{y}$ sean consecutivas, con $\frac{m}{n}<\frac{x}{y}$. Por la propiedad que acabamos de demostrar, tenemos que $xn - my = 1$. En consecuencia, para los enteros $x$ y $y$, existen los enteros $n$ y $-m$ tales que $nx + (-m)y = 1.$ Se concluye que $x$ y $y$ son primos relativos y que la fracción $\frac{x}{y}$ es irreducible.

- Estupendo razonamiento.

- Gracias, tío.

- Bueno, resumiendo lo que tenemos hasta aquí: a partir de $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$ fuimos insertando mediantes y obtuvimos fracciones positivas e irreducibles ordenadas estrictamente en forma creciente. Esto significa que ninguna fracción positiva e irreducible aparece más de una vez en el árbol. Ahora lo más sorprendente es que toda fracción positiva e irreducible aparece en el *Árbol de Stern – Brocot*.

- Lo que equivale a demostrar que toda fracción positiva e irreducible es la mediante de dos fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ tales que $bc - ad = 1$.

- Exacto. Vamos a la demostración. Sea $\frac{m}{n}$ una fracción positiva e irreducible. En primera instancia, observemos que $\frac{a}{b} = \frac{0}{1} < \frac{m}{n} < \frac{1}{0} = \frac{c}{d}$ . Luego, si en algún nivel de la construcción tenemos que $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$ , siendo $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ fracciones consecutivas, entonces al considerar la mediante $\frac{a+c}{b+d}$ se nos presentan tres casos:

  i) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{m}{n}$ En este caso, la demostración concluye.

  ii) $\frac{a+c}{b+d} < \frac{m}{n}$ En este caso, sustituimos $a$ por $a + c$ y $b$ por $b + d$

  iii) $\frac{a+c}{b+d} > \frac{m}{n}$ En este caso, sustituimos $c$ por $a + c$ y $d$ por $b + d$

  Así sea que se dé cualquiera de los casos ii) o iii), al calcular de nuevo la mediante, se presentan de nuevo tres casos: uno de ellos que concluye la demostración, cuando $\frac{m}{n} = \frac{a+c}{b+d}$ y, en caso contrario, se irá acotando más aún la fracción $\frac{m}{n}$ entre dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ consecutivas. ¿Podemos seguir este proceso indefinidamente?

- Creo que no, pero no podría decirte formalmente porqué.

- Bueno, no es evidente. Vamos a determinar una cota superior para la cantidad de pasos en los que obtendremos que $\frac{m}{n}$ sea la mediante de las fracciones consecutivas $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ . No olvidemos que $bc - ad = 1$. Como $\frac{a}{b} < \frac{m}{n} < \frac{c}{d}$ , entonces $mb - na > 0$ y $cn - dm > 0$. Ahora bien, como $mb - na$ y $cn - dm$ son enteros positivos, podemos asegurar que $mb - na \geq 1$ y $cn - dm \geq 1$. Estas dos desigualdades junto con el hecho de que $a, b, c, d$ son no negativos, nos permite asegurar que

  $(a + b)(cn - dm) + (c + d)(mb - na) \geq a + b + c + d$ **(1)**

Por otra parte, aplicando maniobras matemáticas de rutina al miembro izquierdo de **(1)**, obtenemos
$(a+b)(cn-dm)+(c+d)(mb-na)=(m+n)(bc-ad)=m+n$ **(2)**.

De **(1)** y **(2)**, concluimos que $m+n \geq a+b+c+d$ **(3)**.

¿Cómo interpretamos esta última desigualdad? Observa que $m+n$ es un entero fijo, pues es la suma del numerador y denominador de la fracción $\frac{m}{n}$ dada. Mientras que en cada reemplazo, alguno de los enteros $a$ o $b$, o alguno de los enteros $c$ o $d$ aumenta, la desigualdad **(3)** nos indica que no pueden aumentar indefinidamente: en un máximo de $m+n$ pasos el proceso debe concluir y la demostración está completa.

- ¡Qué demostración más hermosa! Resulta entonces que en este árbol aparece cada fracción positiva e irreducible exactamente una vez. ¿Qué puedes decirme sobre Stern y Brocot?

Mi tío Pedro recurrió de nuevo a una sus fichas, esos trozos de papel en los que anotaba datos con una letra sólo comprensible para él. Respondió a mi pregunta:

- Moritz Stern fue un matemático alemán quien vivió entre 1807 y 1894. Stern sucedió nada más y nada menos que a Gauss en la Universidad de Göttingen. Por otra parte, Achielle Brocot fue un relojero francés y matemático aficionado, quien vivió entre 1817 y 1878. Su interés en las fracciones y sus propiedades estaba motivado por la necesidad de perfeccionar los mecanismos de los relojes.

- ¡Qué fascinante! Me gustaría saber cómo aplicaba Brocot sus conocimientos matemáticos en la fabricación de relojes.

- Eso, querida sobrina, te lo explicaré en otra ocasión. Ya tu tía está sirviendo la cena y sabes cómo le molesta que la hagamos esperar.

## Referencias

Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O., *Concrete Mathematics*. 2nd. ed., Addison-Wesley, 1994.

Guthery, S.A. *Motif of Mathematics*. Docent Press. 2011.

Fabiola Czwienczek Miler (fabiolaczw@gmail.com)

Universidad Pedagógica Experimental Libertador
Maracay, Venezuela

...