ISSN: 2711-1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 1 No. 1 (2020), pp.72-73

Problemas y Soluciones

José Nieto, Jorge Tipe (eds.)

El objetivo de esta sección es presentar problemas matemáticos interesantes y sus soluciones. Invitamos a los lectores a proponer problemas que puedan ser abordados por estudiantes de la escuela media o de los dos primeros años de universidad sin conocimientos especializados. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse a los editores por correo electrónico, en español, portugués o inglés. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada. Problemas abiertos conocidos no son aceptables.

Problems and Solutions

The goal of this section is to present interesting mathematical problems and its solutions. We invite the readers to propose problems which may be tackled by high school or college students without specialized knowledge. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editors in English, Spanish or Portuguese. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely. Known open problems are not suitable.

1 Problemas propuestos

1. Eduardo hizo un cubo grande uniendo cierto número de cubitos idénticos y luego pintó alguna caras del cubo grande. Su hermana Nora tiró el cubo al piso y éste se desarmó en los cubitos originales. Cuarenta y cinco de estos cubitos no tenían ninguna cara pintada. ¿Cuántas caras del cubo grande había pintado Eduardo? (Canguro 2018, Junior P29)
2. Una circunferencia divide al plano en dos regiones. Dos circunferencias secantes lo dividen en 4 regiones. ¿En a lo más cuántas regiones queda dividido el plano por 100 circunferencias secantes dos a dos? (José Nieto, COMATEQ 2018, P7)

   Nota: Dos circunferencias son secantes si tienen exactamente dos puntos en común.
3. Una circunferencia que pasa por el vértice B y el punto medio de la hipotenusa AC de un triángulo rectángulo ABC interseca a los otros dos lados en los puntos M y N. Si $AC = 2 \cdot MN$, pruebe que M y N son los puntos medios de los lados. (Torneo de las Ciudades Otoño 2018)

DOI: 10.48082/espmat-v01n01a20p06

4. Sean a, b, c, d enteros positivos tales que $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Pruebe que $a + b + c + d$ es compuesto.
5. Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567. ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7? (José Nieto, Olimpiada de mayo 2017, segundo nivel, P4)
6. Sea ABC un triángulo escaleno y acutángulo. Se trazan las alturas BE y CD que se intersectan en H. La bisectriz del ángulo $\angle BAC$ intersecta a las alturas BE y CD en P y Q, respectivamente. Sea T el ortocentro del triángulo HPQ, pruebe que los triángulos TDA y TAE tienen igual área. (Jorge Tipe, Olimpiada Rioplatense 2018)
7. Halle el menor entero positivo k para el cual existen dos enteros positivos distintos a y b tales que $k^3 = a^4 + b^4 + (a + b)^4$. (Jorge Tipe)
8. Hay 100 estudiantes tomando un examen. El profesor los llama uno por uno y les hace una sola pregunta: "¿Cuántos de los 100 estudiantes resultarán aprobados al finalizar este examen?". La respuesta del estudiante debe ser un número entero. Una vez oída la respuesta, el profesor de inmediato y públicamente anuncia su veredicto, que puede ser *aprobado* o *aplazado*. Una vez examinados todos los estudiantes, llega un inspector que revisa si algún estudiante fue aplazado pero dijo la respuesta correcta. Si hay al menos un estudiante en esa situación, entonces el profesor es suspendido y todos los estudiantes aprueban el examen. De lo contrario, no se realiza ningún cambio.

   ¿Pueden los estudiantes ponerse de acuerdo en una estrategia que les permita aprobar el examen a todos ellos? (Olimpiada Metropolis, 2019).

José Nieto jhnieto@gmail.com

Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Jorge Tipe jorgetipe@gmail.com

Instituto de Física y Tecnología de Moscú.