La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas[1]

Mary Falk de Losada

Resumen

Se analiza las razones que guían el diseño y la elaboración de las pruebas que componen las diferentes etapas o rondas que conforman la Olimpiada Colombiana de Matemáticas en cada una de sus realizaciones anuales, mostrando cómo se busca desarrollar el pensamiento matemático del estudiante participante y cómo se caracteriza el pensamiento que se invita al estudiante a desarrollar. Esto se hace en el contexto de analizar el pensamiento involucrado en la solución o soluciones de algunos problemas representativos de cada ronda de un año específico.
Palabras y frases clave: Pensamiento matemático, problemas y rondas de olimpiadas de matemáticas, creación y selección de problemas.

The Motivation and the Thinking behind Each of the Problems Created and Selected for Mathematics Olympiads

Abstract

The reasons that guide the design and elaboration of the problems that compose the different stages or rounds that make up the annual realization of Mathematical Olympiads are analyzed for the purpose of showing how they seek to develop the mathematical thinking of the participating student and how the thinking that the student is invited to develop can be characterized. This is done in the context of the analysis of the thinking involved in the solution or solutions of problems selected as representative of each round belonging to a certain year.
Key words and phrases: Mathematical thinking, problems and rounds of mathematical Olympiads, creation and selection of problems

Introducción

En varios escenarios hemos mostrado diferentes formas en que los problemas de olimpiadas impactan el desarrollo del pensamiento matemático del niño y del joven. Otras posibilidades importantes para explorar en relación con las olimpiadas incluyen el examinar la forma en que la estructura de olimpiadas incide sobre la formación pedagógica del profesor y su dominio de la enseñanza a través de la solución de problemas, o la manera en

[1] Recibido 15/05/2019. Aceptado 15/07/2019.

DOI: 10.48082/espmat-v01n01a20p01

que la participación en olimpiadas puede motivar a cada estudiante a buscar su máximo nivel de desempeño en matemáticas, temas todos muy cerca de la dinámica del aula.
En un seminario preliminar a la Olimpiada Iberoamericana, dirigimos nuestras consideraciones hacia las olimpiadas mismas y las pruebas que las conforman. El propósito de este escrito es transmitir nuestra ponencia en el seminario en el cual se examinó la construcción de las pruebas que conforman las olimpiadas de matemáticas en Colombia para determinar las razones que motivan y los objetivos que se tienen al seleccionar un cierto problema para cada prueba.
Como en general las olimpiadas están compuestas por varias rondas, cada una con un estilo particular de problema, debemos esperar que se busquen diferentes fines en cada caso. En lo que sigue solamente los problemas de selección múltiple no son originales del comité de problemas de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas.

Problemas de tipo selección múltiple

Los problemas de tipo selección múltiple son particularmente aptos para grupos amplios de estudiantes. Creo que se dirigen en especial a indagar por conocimientos básicos de la matemática escolar y los problemas están diseñados de. tal forma que se permite al estudiante que tiene buenas intuiciones[2] acerca de la matemática, sin que necesariamente posea un método de solución completa del problema, llegar a una respuesta acertada.
Para examinar esta afirmación (que para algunos podría ser escandalosa), veamos un buen ejemplo de problemas de selección múltiple.

Prueba Clasificatoria, Primer Nivel, Grados 6 y 7

Primero unas palabras sobre los niveles de las pruebas; se incluyen dos grados en cada nivel con la idea de permitir al estudiante la posibilidad de trabajar para mejorar su resultado de un año a otro. Ahora veamos el problema que hemos seleccionado para mostrarlo hoy.

Problema.

Cinco amigos compiten en un torneo de dardos. Cada uno de ellos tiene dos dardos para lanzar al mismo blanco circular, y el puntaje de cada uno es la suma de los dos puntajes de las regiones donde llegan los dos dardos que lanzó. Los puntajes asociados a las regiones son números enteros de 1 a 10 y cada lanzamiento llega a una región de diferente valor. Los puntajes obtenidos son: Alicia 16 puntos, Benjamín 4 puntos, Carla 7 puntos, David 11 puntos y Eugenia 17 puntos. ¿Cuál de ellos lanzó el dardo que llegó a la región que vale 6 puntos?

(A) Alicia (B) Benjamín (C) Carla (D) David (E) Eugenia

Solución.

Respuesta: (A).

[2] Para efectos del presente trabajo, tomaremos en cuenta una definición “de trabajo” de la palabra “intuición”. Se dice que se ha utilizado la intuición para llegar a una solución (o respuesta) si se llega a ella sin generar o poseer una explicación o justificación completa y sin embargo estar convencido de que sea correcta.

Benjamín debe lanzar un 1 y un 3. Esto significa que Carla debe lanzar un 5 y un 2, porque obtiene 7 puntos lanzando dos números diferentes, y ninguno de ellos puede ser ni 1 ni 3. Razonando de manera similar, Alicia lanza un 10 y un 6, David lanza un 7 y un 4 y Eugenia lanza un 9 y un 8. Es Alicia quien lanza el 6.

Segunda solución

El puntaje de Eugenia puede obtenerse o bien lanzando 10 + 7 o bien 9 + 8. En el primer caso, sería imposible que Alicia obtuviera 16 puntos. Entonces, Eugenia obtiene 17 lanzando un 9 y un 8, de modo que el puntaje de 16 que obtiene Alicia se da lanzando un 10 y un 6. Los demás lanzaron 11 = 7+4, 7=5+2 y 4= 3+ 1.

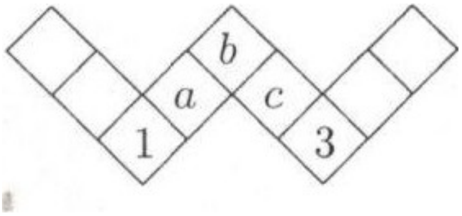
Nótese que es importante que el estudiante lea con cuidado el enunciado, se dé cuenta que todo puntaje se obtiene sumando 2 números y se centre en el puntaje de Benjamín (o de Eugenia) ya que de allí arranca toda la solución.
Que lea con cuidado el enunciado, le permite ver de inmediato que todas las regiones donde llegan los dardos son diferentes, que hay 10 regiones y que cada uno de los cinco amigos lanza dos dardos.
De allí debe centrarse en ver cuál de los puntajes es interesante dadas estas condiciones.
Es bastante fácil ver, entonces, que 4 es el único que tiene una sola manera de descomponerse como suma de dos puntajes diferentes. Y en el caso del puntaje de Eugenia, debe tenerse que 17 = 9 + 8. Con esto determinado queda una sola posibilidad de obtener puntaje 16, y ésta es 16 10 + 6, de modo que la respuesta es la (A). No hay necesidad de mirar más allá de la (E) y la (A).
Finalmente, el estudiante que mira la (A) y analiza que 16 = 10 + 16 o 16 = 9 + 7 y que no hay otra forma de obtener un puntaje de 16, está con buenas posibilidades de seleccionar la (A). El hecho de que las respuestas estén dadas en los ítems a seleccionar permite ejercer la intuición de esta manera sin que se tenga una solución completa. Esto le da al estudiante una especie de meta corta a cumplir, es decir, intuye que la respuesta debe ser A y examina las demás alternativas tratando de comprobarlo.

Prueba Selectiva - Primer Nivel, Grados 6 y 7

En las pruebas de la segunda ronda de competencia las respuestas son números enteros entre 000 y 999. Modelado tras el examen AIME, pero compuesto en general por problemas mucho más fáciles, esta segunda ronda exige que el estudiante tenga ciertos conocimientos básicos de la matemática y que sea capaz de generar una solución completa al problema.
Veamos un ejemplo para los estudiantes más jóvenes.

Problema.

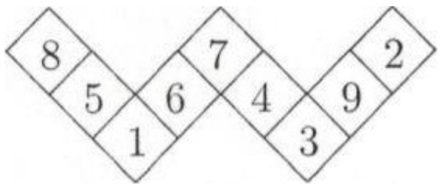
En el siguiente tablero se colocan los dígitos de 1 a 9 una vez cada uno, de forma que la suma de tres casillas en línea sea siempre la misma. Dos de los números ya se han puesto. ¿Cuál es el número formado por los dígitos *abc*, en ese orden?



Solución.

Respuesta: 674.

Como la suma de tres casillas en línea es siempre igual, sumando las cuatro líneas se obtiene un múltiplo de 4. Esta suma es lo mismo que sumar todos los números de 1 a 9, pero repitiendo los que están en 2 líneas al mismo tiempo, que son el 1, el 3 y el de la casilla b. Sin tener en cuenta el número en la casilla b, la suma es $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 1 + 3 = 49$, así que para que la suma sea múltiplo de cuatro, los únicos números posibles para b son 7 y 3, pero como el 3 ya se utilizó, el dígito b debe ser 7. Entonces, como la suma de cada línea debe ser $(49 + 7) \div 4$ 14, por lo tanto, en las casillas a y c deben ir los números 6 y 4 respectivamente, y la respuesta pedida es 674. Una forma de llenar el tablero con las condiciones pedidas es la siguiente:

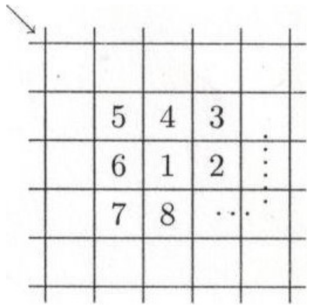


Este problema tiene solución única, aunque hay varias formas de llenar la configuración completa. Así las cosas, un estudiante puede de pronto resolver el problema sin tener un argumento contundente que lo guía.

Discutamos el pensamiento requerido para llegar a esta solución. Es una variación, quizás más fácil, de problemas conocidos como son los cuadrados mágicos, un análisis de la suma total y las sumas parciales y de sus factores, temas tratados en el aula. La mayoría de nuestros estudiantes no conocen estos problemas clásicos. Pero con una lectura juiciosa del enunciado, estarán en condiciones de identificar lo que deben buscar. Por la igualdad de las sumas en las cuatro filas, saben de una vez que $a = c+2$. Se pone de inmediato claro que *a, b* y *c* no pueden ser todos impares porque la suma que generan es demasiado grande, aun cuando $b = 5$, pues se obtiene así que la suma en cada fila debe ser 15, lo cual se puede obtener colocando a la izquierda a 8 y 6 con el 1, pero dejando 2 y 4 con el 3. Cualquier otro valor para *b* con *a, b, c* impares conlleva una suma por fila más grande aún. Igualmente colocando valores pares para *a, b, c,* daría sumas impares (dos pares y un impar) en las dos "filas" del intermedio y sumas pares (dos impares y un par) en las dos "filas" extremas. Por lo tanto, deben ser *a, c* pares y *b* impar, o *a, c* impares y *b* par. Nuevamente, esta segunda combinación no es posible porque quedaría un solo impar y las dos filas extremas serían de paridades distintas. Entonces se sabe que *a, c* son pares y *b* impar.

Con este análisis, aunque el estudiante no tenga una solución contundente, está en condiciones de probar pares de valores pares para *a, c*, (4, 2), (6, 4),(8, 6) y valor impar para *b*, llegando sin perder muchísimo tiempo a una configuración que cumple las condiciones del enunciado del problema.

Problema.



Se quiere escribir los números desde 1 hasta 121 en un tablero de 11 x 11. Para esto se empieza colocando un 1 en la casilla del medio (en la sexta fila y sexta columna) y a partir de ahí se empiezan a colocar los demás en forma de espiral como se ve en la figura. Diga cuál resulta ser la suma de los números sobre la diagonal señalada por la flecha.

Solución.

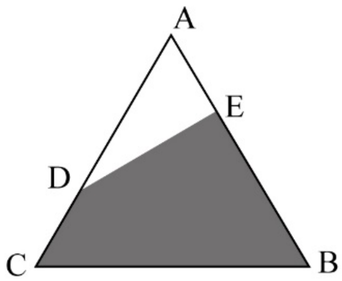
Respuesta: 511.

Analizando la forma en que se ubican los números, se puede ver que los números que se ubican sobre la diagonal marcada y por "debajo" del 1 son los cuadrados de los números impares, pues en el momento que se coloca un número en esta posición las casillas que ya han sido enumeradas forman un cuadrado perfecto, y, además, los cuadrados de lado par se forman justo antes de colocar el número en la diagonal, por "encima" del 1. De esta forma vemos que todos los números sobre la diagonal son cuadrados impares o cuadrados pares más 1, y la suma de todos ellos es igual a la suma 1 + 4 + 9 + • • • + 100 + 121 + 5 = 511.

Buscando una solución contundente se observa que cada vez que se llega de nuevo sobre la diagonal "debajo" de 1 se suma 4 veces el número de casillas en el lado del cuadrado que se recorre, de modo que los números sobre esa diagonal son de la forma 1 + 8, 1 + 8+ 16, 1 + 8 + 16 + 24, 1 + 8 + 16 + 24 + 32,… (de forma $1 + 8 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 4n(n+1) = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$), que son precisamente los cuadrados de los números impares consecutivos a partir de 3^2 y hasta 11^2. Para determinar cuáles números están sobre la diagonal "arriba" de 1, se observa que para llegar allí se recorre dos veces el número de casillas del respectivo cuadrado, dando 1 + 4 y luego, de allí en adelante, dos veces el mismo número más dos veces el número de casillas del siguiente cuadrado, o sea, 1 + 4 , 1 + 4 + 4 + 8, 1 + 4 + 4 + 8 + 8 + 12,… que son de la forma $1 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 4n = 1 + 4n^2 + 4n - 4n = 1 + (2n)^2$ que son iguales a 1 más que los cuadrados de los números pares consecutivos. Luego, se completa la solución con el argumento anterior, "observando" cómo se disponen los números en las casillas del tablero.

Problema.

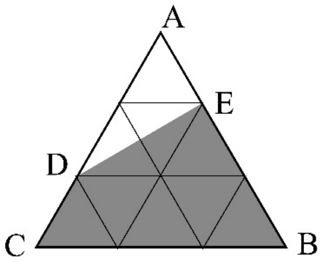
El triángulo equilátero ABC tiene área 864. Sobre los lados AC y AB se toman puntos D y E respectivamente, de forma que $AD = 2DC$ y $AE = CD$. ¿Cuál es el área del cuadriláteroBCDE?



Solución.

Respuesta: 672.

Trazando paralelas a los lados del triángulo por los puntos que dividen los lados del triángulo en tres partes iguales, el triángulo inicial queda dividido en 9 triángulos equiláteros iguales, cada uno con área 96. El área del cuadrilátero está formada por 6 de estos triángulos, y dos medios triángulos (que podrían formar un triángulo completo reacomodando las piezas), así que el área del cuadrilátero *BCDE* es 7 x 96 = 672.



Analizando esta solución, observamos que se utiliza una descomposición de la figura en triángulos más pequeños que sirven como si fueran "unidades" de medida del área, dos partes se recomponen, se cuentan y se multiplica el número de "unidades" por el área de cada una para llegar a la respuesta.

Queremos enfatizar dos cosas aquí. Primero observamos que ésta es una estrategia que los estudiantes utilizan autónomamente cuando resuelven problemas de área. Es una estrategia netamente geométrica que relaciona la medición apropiadamentey asociada primordialmente con la geometría antes de recurrir a fórmulas que dan prelación a la interpretación aritmética de la situación presentada.

Prueba Final - Primer Nivel, Grados 6 y 7

En esta ronda, el estudiante debe presentar argumentos completos que demuestran un resultado o justifican completamente una solución. Aquí se busca que ejerza el razonamiento lógico, sus poderes de deducción y que sea capaz de expresar sus ideas con claridad y contundencia, en situaciones sencillas, pero matemáticamente ricas. Veamos el ejemplo que hemos seleccionado.

Problema.

Se quiere ubicar algunos puntos en el plano y numerarlos con los números 1, 2, 3, etc. de tal manera que se cumplan las siguientes condiciones

- No puede haber cuatro de ellos sobre una misma línea recta
- Si *a, b, c* y *d* son los números asignados a los puntos *A, B, C, D* y *a* x *c* =*b* x *d*, entonces *ABCD* es un paralelogramo

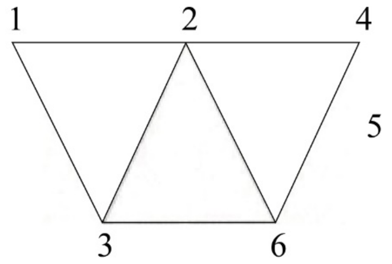
(a) **(10 puntos)** Muestre que es posible ubicar y numerar 6 puntos que cumplan estas condiciones.

(b) **(30 puntos)** Demuestre que no es posible hacer esto con 25 puntos.

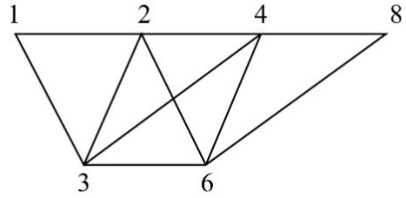
(c) **(60 puntos)** ¿Cuál es la mayor cantidad de puntos que es posible ubicar y numerar cumpliendo las condiciones? Justifique su respuesta.

Solución.

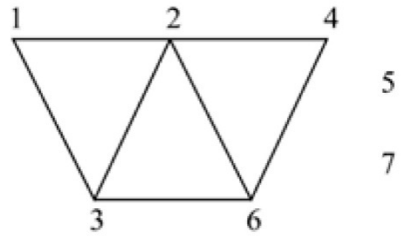
1. Una configuración posible es:



2. Sea P_i el punto donde se escribe el número i. Nótese que 1 x 6 = 2 x 3, 2x6 = 4x3 y 4x6 = 8x 3. Por lo tanto $P_1P_2P_6P_3, P_2P_4P_6P_3$ y $P_4P_8P_6P_3$deberían ser paralelogramos. Esto implicaría $\overline{P_1}\overline{P_2} \parallel \overline{P_3P_6}$, $\overline{P_2}\overline{P_4} \parallel \overline{P_3P_6}$ y $\overline{P_4}\overline{P_8} \parallel \overline{P_3P_6}$, pero quedarían $P_1P_2P_4P_8$colinealesen una paralela a $\overline{P_3P_6}$, y no es posible de acuerdo a las condiciones del problema.



3. No se puede ubicar más de 7 por el argumento expuesto en la parte (b). Con 7 es posible, por ejemplo, así:



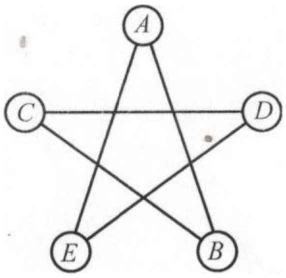
La parte (a) del enunciado tiene el propósito de invitar al estudiante a plasmar las condiciones del problema en una configuración que las cumple. Al resolverla se apropiará de ellas. La posibilidad se demuestra directamente construyendo el objeto buscado.
La imposibilidad de lograr una configuración de 8 puntos que cumple las condiciones del problema, invita en un contexto natural para el estudiante a usar un argumento por contradicción, pues nótese que al suponer que existe y hacer cumplir la segunda condición del enunciado, el estudiante "verá" que no se puede cumplir al mismo tiempo la primera condición llevándolo a expresarse naturalmente en términos equivalentes a lo que los profesores llamamos una demostración por contradicción.
Nótese que se demuestra la posibilidad de una configuración con 7 puntos, construyendo y mostrando una configuración que cumple las condiciones del problema. Este es un ejemplo de una forma clásica de demostrar la existencia de algún ente matemático, y es el que el estudiante de grado 6 o 7 naturalmente utiliza.
El problema, entonces, abre la posibilidad al estudiante de argumentar directamente en un caso y por contradicción en el otro.

Prueba Clasificatoria - Nivel Intermedio, Grados 8 y 9

Para los estudiantes de grados 8 y 9 se plantea una serie de pruebas con características similares a las de primer nivel, pero con una ronda adicional de problemas que requieren demostración completa y que, adicionalmente, están planteados en términos que requieren mayor conocimiento de temas pertenecientes a la matemática escolar o ampliaciones o profundizaciones de lo que tradicionalmente se trata en el currículo escolar.
Veremos, entonces, en primer lugar, un problema de selección múltiple. Se da una solución contundente y luego se discuten posibles formas de aproximación a la respuesta correcta, que demuestran aspectos deseables de pensamiento matemático sin proceder con contundencia.

Problema.

En la estrella de 5 lados de la figura, las letras *A, B, C, D* y *E* se reemplazan por los números 3, 5, 6, 7, y 9, aunque no necesariamente en este orden. La suma de los números al final de los segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EA}$ forman una progresión aritmética, aunque no necesariamente en ese orden. ¿Cuál es el valor del término del medio de la progresión?



(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Solución.

Respuesta (D).

Cada número aparece en dos sumas, así que la suma de la sucesión es

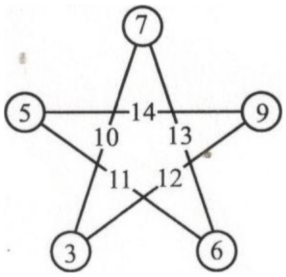
$$2(3 + 5 + 6 + 7 + 9) = 60.$$

El término del medio de una progresión aritmética de 5 términos es el promedio de los términos, por lo tanto 60/5 = 12 es el término del medio. La figura muestra un arreglo de 5 números que cumplen la condición.

Ahora bien, no se puede resolver este problema si no se sabe qué es una progresión aritmética. Así el problema requiere un poco de conocimiento de la matemática escolar.
Se puede resolver el problema con un poco de ensayo y error, guiado por el análisis, de modo que no es un simple tanteo sino una búsqueda dirigida. Si se sabe que en una

progresión aritmética la diferencia entre cualquier par de términos consecutivos es siempre la misma, y que de acuerdo con el enunciado del problema hay cinco términos en la sucesión y los elementos de la sucesión se van a hallar sumando dos números entre 3, 5, 6, 7, 9, basta hallar la menor de estas sumas 3 + 5 = 8 y la mayor 7 + 9 = 16 para ver con claridad que la diferencia entre los elementos de la sucesión sólo puede ser igual a 1 o a 2, ya que en este último caso la progresión sería 8, 10, 12, 14, 16. Pero también un análisis de esta progresión arroja que todas las sumas tendrían que ser pares, lo cual no es posible ya que los números a nuestra disposición son cuatro impares y un par. Se sigue que la diferencia entre los términos de la sucesión debe ser 1 y que las sumas deben ser tres pares y dos impares (ya que,si hay dos sumandos, la única forma de obtener una suma impar es sumando un par y un impar, hay un solo par 6 que está en exactamente dos de las sumas).

Adicionalmente, estos dos impares deben ser consecutivos, de modo que deben resultar de sumar 6 con 5 y 7, dando 11 y 13, de donde se puede deducir que el término del medio debe ser 12, y dejando para completar la disposición de los números las demás sumas (pares) 3 + 7, 3 + 9 y 9 + 5.



Prueba Selectiva - Nivel Intermedio, Grados 8 y 9

Esta prueba tiene características similares al de primer nivel. Veamos qué tipo de pensamiento matemático queremos explorar con estudiantes de grados 8 y 9a través del primer problema, el problema más sencillo, de la prueba.

Problema.

¿Cuáles son las tres primeras cifras (de izquierda a derecha) del menor entero positivo tal que la suma de sus dígitos es 2005?

Solución.

Respuesta: 799.

Para que el número sea lo más pequeño posible, debe tener la menor cantidad de dígitos. Dividiendo 2005 por 9, se tiene que 2005 = 9x 222+7. Como cada dígito es menor o igual que 9, el número de dígitos necesario para que la suma sea 2005 es 223 (pues con 222 números, la suma es máximo 1998). Para lograr el menor número con esta cantidad de dígitos, es necesario colocar el primer dígito lo más pequeño posible, así que debe ser 7 (pues si es más pequeño no se logra la suma deseada), y de ahí en adelante, los otros 222 dígitos deben ser nueves, y los tres primeros dígitos del número mencionado son 799.

Esta solución se basa en propiedades básicas del sistema de numeración. El estudiante debe usar su conocimiento del sistema para plantear las operaciones que va a efectuar, la interpretación que va a dar a los resultados de las operaciones y la estrategia que va a utilizar para arreglar las cifras que obtiene. Esto es, invita al pensamiento autónomo que decide por sí mismo cómo proceder.

Nótese cómo esto contrasta con limitarse en el aula, como comúnmente ocurre, a dar al estudiante una operación a efectuar y sólo pedir el resultado (lo cual pueden hacer con gran precisión las calculadoras más sencillas), o dar al estudiante una ecuación a resolver para lo cual debe usar ciertas transformaciones conocidas y practicadas repetidamente en clase. Este trabajo rutinario es tan poco interesante que el papel del profesor se reduce a detective de errores de manipulación, en lugar de promotor y evaluador de originalidad y contundencia del pensamiento y la argumentación matemáticos del estudiante.

Prueba Semifinal - Nivel Intermedio, Grados 8 y 9

Al igual que la Prueba Final de Primer Nivel, aquí se busca que el estudiante pueda demostrar un resultado o justificar su respuesta completamente. Las situaciones presentadas no requieren extenso conocimiento matemático, sino privilegian el razonamiento.

Problema.

Sea $n > 1$ un entero. Se tienen n personas con nombres distintos de manera tal que no hay una que esté a igual distancia de otras dos. Cada una tiene un lápiz y una hoja, en la cual escribe el nombre de la persona más cercana.

(a) **(10 puntos)** Demostrar que si $n = 3$ uno de los tres nombres no aparece en ninguna hoja.

(b) **(30 puntos)** Mostrar que si n es par es posible que todos los nombres sean escritos.

(c) **(60 puntos)** Demostrar que si n es impar al menos uno de los nombres no aparece en ninguna hoja.

Solución.

(a) De las tres posibles distancias distintas entre las personas se escoge la menor y se denota por d. Las dos personas que están a la distancia d se escribirán una a la otra y, por tanto, la tercera persona no podrá ser escrita.

(b) Si n es par es posible separarlas en pares de personas y ubicarlas de tal forma que cada persona quede muy cerca de su compañero, pero alejada de todas las demás parejas. Así, cada persona escribirá el nombre de su compañero y todos los nombres estarán escritos.

(c) Igual que en la parte (a), sea d la distancia más pequeña; las dos personas que están a esa distancia se escribirán una a la otra, por lo tanto, si se retiran del total, el número de papeles escritos se disminuye en por lo menos dos; si este proceso se repite con las personas que quedan, cada vez que se retira la pareja más cercana (puede que haya dos parejas con la menor distancia posible, pero éstas no van a compartir persona ya que no hay ninguna a igual distancia de otras dos, por tanto, se puede retirar alguna de las dos parejas), se están retirando mínimo dos papeles, por lo que, cuando queden tres personas, se habrán retirado por lo menos n - 3 papeles, de modo que se llega a la situación de la parte (a), (con un número de papeles menor o igual a 3). Por tanto, quedará una persona que no será escrita.

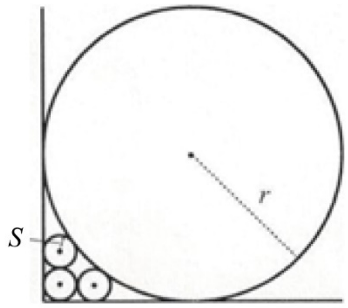
Nótese que se ha presentado un razonamiento de tipo inductivo muy interesante, que fluye naturalmente a partir de la primera pregunta que plantea el menor caso particular de interés. La situación de personas y nombres modela una situación matemática que normalmente se enuncia en términos más abstractos como puntos en el plano. Las menores distancias no se escriben aquí como valores absolutos sino se traducen en la escritura de nombres en el papel. Todo este modelamiento permite al estudiante centrarse en lo fundamental de la situación sin tropezarse, de pronto, con un lenguaje simbólico que lo ahuyenta, y presentar su solución del problema igualmente en un lenguaje natural que permite enfatizar los argumentos en sí y no la forma de presentarlos.

Prueba Clasificatoria - Nivel Superior, Grados 10 y 11

Volvemos a problemas de selección múltiple ahora con un nivel mayor de exigencia en cuanto a conocimientos requeridos, pero que de todas maneras permiten el ejercicio de la buena intuición matemática.

Problema.

Se trazan tres circunferencias de radio s en el primer cuadrante del planoxy, la primera circunferencia es tangente a ambos ejes, la segunda es tangente a la primera y al eje x, y la tercera es tangente a la primera y al eje y. Una circunferencia de radio $r>s$ es tangente a la segunda y a la tercera circunferencia y a los ejes coordenados. ¿Cuál es el valor de la razón r/s?



(A) 5 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

Solución.
Respuesta: (D).

Considere el triángulo rectángulo que muestra la figura. Por el Teorema de Pitágoras,

$$(r + s)^2 = (r - 3s)^2 + (r - s)^2$$

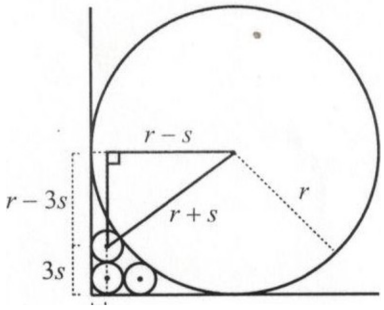
Desarrollando los cuadrados,

$$r^2 + 2rs + s^2 = r^2 - 6rs + 9s^2 + r^2 - 2rs + s^2,$$

y factorizando,

$$0 = r^2 - 10rs + 9s^2 = (r - 9s)(r - s)$$

Como $r \neq s$, se tiene que $r = 9s$ y por lo tanto $r/s = 9$.



Segunda solución

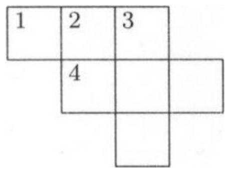
Como la razón r/s es independiente del valor de s, se puede asumir que $s = 1$ y se procede como en la primera solución.

El problema requiere saber algo acerca de la relación entre los centros cuando se presenta la tangencia entre círculos, la relación entre el radio y la recta en el punto de tangencia, y el Teorema de Pitágoras. Se debe poder plantear las ecuaciones que corresponden a estas relaciones y teorema y usar un poco de manipulación algebraica. Entre lo más importante es el saber interpretar los resultados de esa manipulación para expresarlos en términos de la razón buscada.
No se da una ecuación cuadrática a resolver ni las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo para hallar la longitud del tercer lado. Estos son procedimientos rutinarios que no invitan al estudiante al pensamiento analítico y autónomo que lo lleva a plantear las ecuaciones e interpretar sus resultados.

Prueba Selectiva - Nivel Superior, Grados 10 y 11

Problema.
El siguiente es un crucigrama numérico:

Verticales:
1. Cuadrado perfecto.
2. Potencia de 9.
3. Número primo.



Horizontales:
1. Cuadrado perfecto.
4. Número con sus dígitos iguales.

¿Cuál es la respuesta de 3 vertical?

Solución.
Respuesta: 419.

Es fácil ver que la respuesta 2 vertical es 81, y con esto, 4 horizontal es 111.Entonces en 1 horizontal hay un 8 en las decenas, y en las centenas hay un cuadrado perfecto, así que los dos primeros dígitos de 1 horizontal son 18, 48 o 98. El único cuadrado perfecto de tres dígitos con estas indicaciones es 484. Por lo tanto, en 3 vertical, los dos primeros dígitos son 41. Si el número terminara en una cifra par, el número sería par y no podría ser primo. Igual ocurriría si el número terminara en 5. Entonces la respuesta a 3 vertical es uno de los siguientes números: 411, 413, 417 o 419. Pero 411 y 417 son múltiplos de 3, y 413 es múltiplo de 7. Como 419 es primo, ésta es la respuesta buscada.

Los crucigramas plasman una vía de solución en términos de cadenas de implicaciones, a partir de algo que ya se sabe. En los crucigramas comunes, se construye a partir de una primera palabra que uno adivina y supone correcta, cosa muy similar ocurre aquí donde es el 2 vertical que tiene una respuesta numérica clara y fiable. A partir de allí se construye la cadena de implicaciones, unas más sofisticadas que otras.

[1] 4	[2] 8	[3] 4	
	[4] 1	1	1
		9	

Problema.

Sean x, yyz enteros consecutivos tales que$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}>\frac{1}{45}$

¿Cuál es el mayor valor que puede tomar $x + y + z$?

Solución.

Respuesta: 405.

Teniendo en cuenta que $\frac{1}{45} = 3 \text{ x } \frac{1}{135}$, se puede ver que sí$y = x + 1$, y $z = x + 2$, entonces cuando $x \geq 135$ cada sumando es menor o igual que $\frac{1}{135}$, por lo que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{45}$, y cuando$x + 2 \leq 135$, entonces cada termino es mayor o igual que $\frac{1}{135}$ y la suma es mayor. Falta ver qué pasa en el caso en el que $x + 1 = 135$. Como $\frac{1}{134}-\frac{1}{135}=\frac{1}{134 \text{ x } 135}>\frac{1}{135}-\frac{1}{136}=\frac{1}{135 \text{ x } 136}$, se puede ver que en este caso$\frac{1}{134}+\frac{1}{135}+\frac{1}{136}>\frac{3}{135}=\frac{1}{45}$, por lo que éste es el mayor valor de x para el cual se cumple la desigualdad. Por lo tanto, el máximo valor posible de $x + y + z$ es $134 + 135 + 136 = 405$.

Un problema rutinario que requiere efectuar unas sumas de fracciones, se puede volver interesante si se plantea en términos no de una suma determinada (igualdad) sino en términos de una desigualdad como es el presente caso.
Nótese que se requiere analizar cómo se varía el valor de la suma cuando se varían los valores de los denominadores, y que se requiere analizar de todas maneras una diferencia de fracciones. Pero estos análisis resultan de planteamientos hechos por el mismo estudiante en el transcurso de la solución y no son planteados como tareas directas. Nuevamente aquí entonces se privilegia el pensamiento autónomo y el análisis.

Ronda Semifinal - Nivel Superior, Grados 10 y 11

El primer problema que presentamos requiere conocimiento del Teorema de Tales y propiedades de los triángulos semejantes. Se utilizan para transformar la suma de fracciones dada en una suma en la que los sumandos tienen denominador común. Este ejercicio es practicado desde la escuela primaria, pero se logra aquí no a partir de estrategias aritméticas (multiplicación de factores o aplicación de fórmulas) sino con una aplicación precisa de propiedades geométricas. La manipulación es estratégica hacia una finalidad que el mismo estudiante se propone, y utiliza sus conocimientos geométricos para lograrlo.

Problema.
En el triángulo ΔABC sea P un punto en su interior. Por P se traza la paralela al lado $\overline{BC}$, que corta a $\overline{AB}$ en el punto D, la paralela al lado $\overline{AC}$, que corta a BC en el punto E y la paralela al lado AB que corta a $\overline{AC}$ en el punto F. Si AF denota la longitud del segmento $\overline{AF}$, AC la del segmento AC, etc. Determine el valor de

$$\frac{AF}{AC}+\frac{CE}{CB}+\frac{BD}{BA}$$

Solución.
Se tiene que $CE \parallel D'P$ y $D'C \parallel PE$, se sigue que $PD'CE$ es un paralelogramo y $D'P = CE$. Además, $\Delta D'FP \sim \Delta CAB$ ya que tienen sus lados correspondientes paralelos. De lo anterior se sigue que

$$\frac{CE}{CB}=\frac{D'P}{CB}=\frac{FD'}{AC}$$

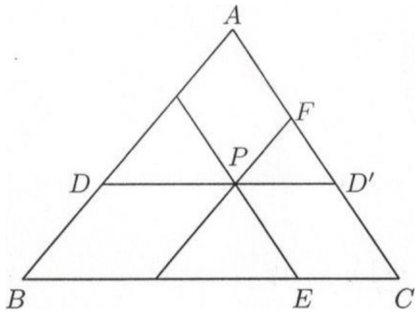
Por el teorema de Tales se tiene que

$$\frac{BD}{BA}=\frac{CD'}{CA}$$

Finalmente,

$$\frac{AF}{AC}+\frac{CE}{CB}+\frac{BD}{BA}=\frac{AF}{AC}+\frac{FD'}{AC}+\frac{D'C}{AC}=1$$

Lo que concluye la solución.



Otro contexto importante en el cual se generan estrategias para luego demostrar que sirven son los juegos estratégicos. En el siguiente problema se presenta una situación interesante de este tipo. Para resolverlo el estudiante tiene que producir un análisis que se puede aplicar a cualquier conjunto de números que Iván podría decidir escribir en el tablero. Pensamos además que se requiere haber tenido experiencia previa con problemas que utiliza la representación binaria de los números como estrategia para su solución.

Problema.
Sea n un entero positivo. Iván y Juan Ignacio tienen un juego en el cual Iván escribe n números enteros en un tablero, Juan Ignacio borra algunos de ellos (puede que no borre ninguno, pero no puede borrarlos todos) y a los que quedan, les asigna un signo (+ o -). Si la suma de los nuevos números del tablero es múltiplo de 2005, gana Juan Ignacio, de lo contrario, gana Iván. Determinar para cada valor de n quién tiene la estrategia ganadora. Justifique su respuesta.

Nota: Un jugador tiene estrategia ganadora cuando, sin importar cómo juegue el otro, puede garantizar su victoria.

Solución.

Si $n \leq 10$, Iván escribe 1, $2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Nótese que

$$2^k > 2^k - 1 = 2^{k-1} + 2^{k-2} + \cdots + 2^1 + 1$$

para todo entero positivo k. De esta forma, la suma tiene el signo de la potencia de 2 más grande que Juan Ignacio no borra, y como la suma de los valores absolutos de estas potencias es menor que 2005, Juan Ignacio no puede escoger ninguna combinación de signos que le sume un múltiplo de 2005.

Hay $2^n - 1$ posibles sumas de algunos de los números escritos por Iván. Para cada número hay 2 posibilidades: o se suma, o no se suma. Así que en total habría 2^nposibles sumas, pero no es posible borrar todos los números. Ahora, $2^n - 1 > 2005$ para $n \geq 11$, así que si se miran las sumas consideradas previamente, por principio de casillas, necesariamente hay dos de ellas que tienen el mismo residuo al ser divididas entre 2005, ya que sólo hay 2005 residuos posibles. Sean

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_i = 2005 * k_1 + r$$
$$y_1 + y_2 + \cdots + y_j = 2005 * k_2 + r$$

las sumas en cuestión, donde$x_1, x_2, \dots, x_i, y_1, y_2, \dots, y_j$ son números escritos por Iván. Sin pérdida de generalidad, se puede asumir que no hay ningún término que está en ambas sumas, pues dado el caso, se podrían pasar dichos términos a restar en ambas ecuaciones y siguen teniendo el mismo residuo las sumas, pero sin términos compartidos.

Al restar las 2 ecuaciones se obtiene

$$x_1 + x_1 + \cdots + x_i - y_1 - y_2 - \cdots - y_j = 2005 * (k_1 - k_2)$$

donde se evidencia lo que Juan Ignacio tiene que hacer. Basta con asignarle un signo positivo a $x_1, x_2, \dots, x_i$ un signo negativo a $y_1, y_2, \dots, y_j$ y borrar todos los demás, obteniéndose así un múltiplo de 2005.

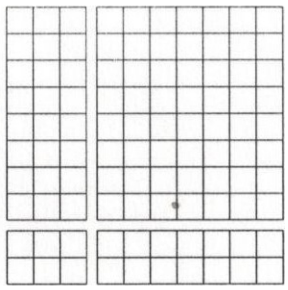
Ronda Final - Niveles Intermedio y Superior, Grados 8, 9, 10 y 11

Este problema, compartido por los dos niveles en la Ronda Final, tiene por objetivo poder comparar directamente el trabajo de un estudiante de nivel intermedio con el trabajo de un estudiante de nivel superior, entre otras cosas con la mira hacia posibles participaciones internacionales.

Por ello, no requiere tanto conocimiento de temas de la matemática escolar. Su solución requiere manejar dos variables de cada subtablero simultáneamente (largo y ancho), pero no es complicado.

Problema.

En un tablero de tamaño 10 x 10, las líneas que lo dividen en cuadros de tamaño 1 x 1 se denominan líneas de corte. Jaime quiere escoger algunas líneas de corte y separar el tablero cortando por ellas, formando así rectángulos, La figura a continuación muestra el caso donde Jaime escoge la tercera línea de corte de izquierda a derecha y la segunda de abajo hacia arriba:

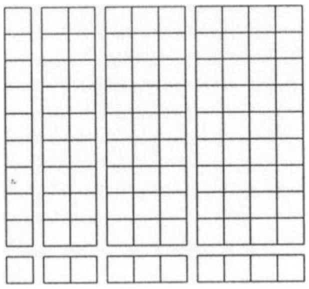


Si Jaime quiere lograr que todas las áreas obtenidas sean diferentes, ¿cuál es el máximo número de líneas de corte que puede escoger?

Solución.

Todos los cortes en un sentido dividen al tablero en varios subtableros de 10 x x para varios valores de x cuya suma es 10. Si para un valor d fijo se tuvieran dos subtableros idénticos de 10 x d, sin importar como se corte en el otro sentido, estas secciones siempre darán lugar a varios subtableros de igual área, pues todos tendrían base d y la altura sería la distancia entre dos cortes consecutivos o entre un corte y el borde del tablero, pero en todo caso habría al menos dos subtableros de igual área, cada uno tomado de uno de los subtableros de 10 x d. Si todos los tableros de 10 x x son distintos, puede haber máximo 4 de éstos, 10 x 1, 10 x 2, 10 x 3, 10 x 4, ya que 1 + 2 + 3 + 4 = 10.

Si en un sentido se hacen los tres cortes enunciados, en el otro no es posible hacer tres cortes, pues se obtendrían dos subtableros, uno de 1 x 4 y otro de 4 x 1. Si se hicieran dos cortes en el otro sentido, éstos deben partir el lado del tablero en tres partes que pueden ser (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5) en algún orden. La partición (1, 2, 7) da lugar a un tablero de 1 x 2 y a otro de 2 x 1, la partición (1, 3, 6) da lugar a un tablero de 1 x 3 y a otro de 3 x 1, la partición (1,4, 5) da lugar a un tablero de 1 x 4 y a otro de 4 x 1 y finalmente la partición (2, 3, 5) da lugar a un tablero de 2 x 3 y a otro de 3 x 2. Entonces si en un sentido se hicieron tres cortes, en el otro máximo se puede hacer uno, 4 en total. Si en ningún sentido se hacen tres cortes, se hacen a lo más dos cortes en cada sentido, 4 en total.



Como se ve en la figura, sí es posible hacer 4 cortes, luego éste es la cantidad máxima de cortes posible.

La argumentación requerida se reduce a dos cosas. Incluir un análisis de todos los cortes posibles. Demostrar que una situación es posible exhibiendo o construyéndola.

Conclusiones

Nuestro propósito ha sido mostrar algo de lo que se busca que el estudiante sea capaz de hacer a lo largo de una competencia de olimpiadas por rondas.

Cada ronda exige diferentes capacidades de pensamiento matemático del estudiante. Se trata de presentar los problemas de una manera atractiva que motiva al estudiante a resolverlos. Los problemas exigen diferentes niveles de conocimiento matemático. Adicionalmente, por lo general exigen análisis y pensamiento autónomo, ya que el estudiante decide qué va a hacer. Otros problemas, en particular los de selección múltiple, permiten que el estudiante ejerce algo de intuición en fijarse en lo que es importante para la solución. Los problemas de respuesta numérica no pueden responderse correctamente sin hacer un análisis exhaustivo o tener un método completo de solución.

Algunos problemas, como el del juego estratégico requieren creatividad y buen uso de experiencias propias en su solución.

Los problemas de las rondas semifinal y final exigen razonamiento completo. Puede decirse, entonces, en resumidas cuentas, que los propósitos detrás de la creación y selección de los problemas que componen las pruebas de olimpiadas son variados, pero todos apuntan a proporcionar oportunidades y contextos en los cuales el estudiante está invitado a desarrollar el pensamiento matemático y las características que lo distinguen, en contraste con el desarrollo de procedimientos genéricos de solución de ejercicios que es el enfoque más común en el aula.

Agradecimientos

Quisiera reconocer y extender un agradecimiento especial a todas las personas que permanentemente ejercen su creatividad y originalidad en la generación de problemas novedosos, retadores y geniales para animar a jóvenes pensadores a dar su mejor esfuerzo y estirar los límites de su pensamiento en su solución; en especial, a los miembros del Comité de Problemas de las Olimpiadas Colombianas de Matemáticas cuyas bellas creaciones impulsaron las reflexiones del presente artículo.

Referencias

González, E., Rodríguez, H. (Ed), *Problemas y soluciones de la Olimpiada Colombiana de Matemáticas 2005 para Primer Nivel*, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, 2006.

González, E., Rodríguez, H.(Ed), *Problemas y soluciones de la Olimpiada Colombiana de Matemáticas 2005 para Nivel Intermedio*, Universidad Antonio Nariño, Bogotá, 2006.

González, E., Rodríguez, H.(Ed), *Problemas y soluciones de la Olimpiada Colombiana de Matemáticas 2005 para Nivel Superior,* Universidad Antonio Nariño, Bogotá, 2006.

Mary Falk de Losada
Universidad Antonio Nariño
Olimpiadas Colombianas de Matemáticas
Bogotá, Colombia