Espacio Matemático Vol. 1 No. 2 (2020), pp. 140–144

Problemas y Soluciones

José Nieto, Jorge Tipe (eds.)

El objetivo de esta sección es presentar problemas matemáticos interesantes y sus soluciones. Invitamos a los lectores a proponer problemas que puedan ser abordados por estudiantes de la escuela media o de los dos primeros años de universidad sin conocimientos especializados. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse a los editores por correo electrónico, en español, portugués o inglés. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada. Problemas abiertos conocidos no son aceptables.

Problems and Solutions

The goal of this section is to present interesting mathematical problems and its solutions. We invite the readers to propose problems which may be tackled by high school or college students without specialized knowledge. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editors in English, Spanish or Portuguese. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely. Known open problems are not suitable.

1 Problemas propuestos

Recordamos que se siguen recibiendo soluciones a los problemas 1, 2, 4, 5, 7 y 8 publicados en el número anterior.

9. Samantha debe escribir en la pizarra algunos números enteros positivos distintos. Después de haberlos escrito, diremos que un número k ha sido capturado por Samantha si hay en la pizarra dos números distintos cuyo máximo común divisor es k. ¿Cuál es la menor cantidad de números que puede escribir Samantha para que los catorce números $1, 2, 3, \ldots, 14$ sean capturados?

   Mostrar un ejemplo con esa cantidad de números y explicar por qué si escribe menos números no puede lograrlo.

   (Emerson Soriano, Olimpiada Rioplatense 2017, Nivel 1)

10. Un número de siete dígitos es divisible por el producto de sus dígitos. ¿Cuál es la mayor cantidad de veces que puede aparecer el dígito 5 entre los dígitos de dicho número?

    (Olimpiada Nacional de Perú 2018)

11. Cada casilla de un tablero de 8×8 se va a pintar de rojo, verde o azul, de tal forma que cada subtablero de 3×3 tenga al menos una casilla de cada uno de los tres colores. ¿Cuántas casillas rojas puede haber como máximo?
(Olimpiada Nacional de Perú 2018)

12. Sea $A_1A_2A_3$ un triángulo. Sean h_i, w_i y m_i la altura, la bisectriz y la mediana, respectivamente, que parten del vértice A_i. Pruebe que si h_1, w_2 y m_3 son concurrentes, y también h_2, w_3 y m_1 son concurrentes, entonces $A_1A_2A_3$ es equilátero.
(José Nieto, lista corta Ibero 2017.)

13. a) Sea $\overline{pqrst}$ un entero positivo que no es múltiplo de 10. ¿Es posible que el resultado de sumar los números $\overline{pqrst}$ y $\overline{tsrqp}$ sea un número tal que todos sus dígitos sean impares?
    b) Sea $\overline{abcdefg}$ un entero positivo que no es múltiplo de 10. ¿Es posible que el resultado de sumar los números $\overline{abcdefg}$ y $\overline{gfedcba}$ sea un número tal que todos sus dígitos sean impares?

(Torneo de Jóvenes Matemáticos 2020)

14. Hay que dividir un papel cuadrado en tres partes, mediante dos cortes rectos, de modo que al ubicar estas partes de forma adecuada, sin huecos ni superposiciones, se forme un triángulo obtusángulo. Indicar cómo cortar el cuadrado y cómo armar el triángulo con las tres partes.

    Nota. Un triángulo es obtusángulo si uno de sus ángulos mide más de 90°.
(Olimpiada de Mayo 2019)

15. Encontrar el menor número entero positivo N de dos o más dígitos que tiene la siguiente propiedad: Si insertamos cualquier dígito no nulo d entre cualesquiera dos dígitos adyacentes de N obtenemos un número que es múltiplo de d.
(Olimpiada de Mayo 2019)

16. Determine para qué números enteros $n \geq 3$ es posible encontrar números enteros positivos $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ tales que $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} = 1$ y $a_1 a_2 \cdots a_n$ es un cuadrado perfecto.
(Olimpiada Nacional de Perú 2019)

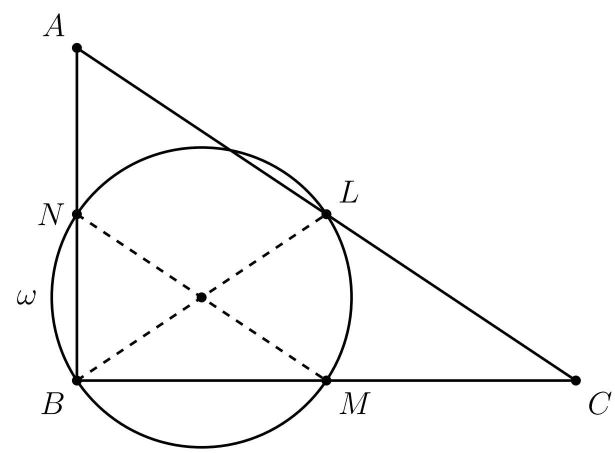
2 Soluciones

3. [**1**(1) (2020) p. 72.] Una circunferencia que pasa por el vértice B y el punto medio de la hipotenusa AC de un triángulo rectángulo ABC interseca a los otros dos lados en los puntos M y N. Si $AC = 2 \cdot MN$, pruebe que M y N son los puntos medios de los lados.

(Torneo de las Ciudades Otoño 2018)

Solución de Dones Colmenárez, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela.

Supongamos que la circunferencia ω dada, corta a AB en N y a BC en M. Sea L el punto medio de AC. Entonces $AL = LC = \frac{1}{2}AC = MN$.



Como $\angle ABC$ es recto, MN es un diámetro, por ende $\angle NLM$ es recto. Por propiedad de los triángulos rectángulos, L equidista de los tres vértices del triángulo ABC, luego $BL = LC = \frac{1}{2}AC = MN$. Por lo tanto BL es también un diámetro de ω, en consecuencia el cuadrilátero $BMLN$ es un rectángulo pues tiene todos sus ángulos rectos. Así, $NL = BM$, $NL \parallel BM$, $LM = NB$ y $LM \parallel NB$. Entonces los triángulos ABC y ANL son semejantes, y también lo son ACB y LCM, cumpliéndose

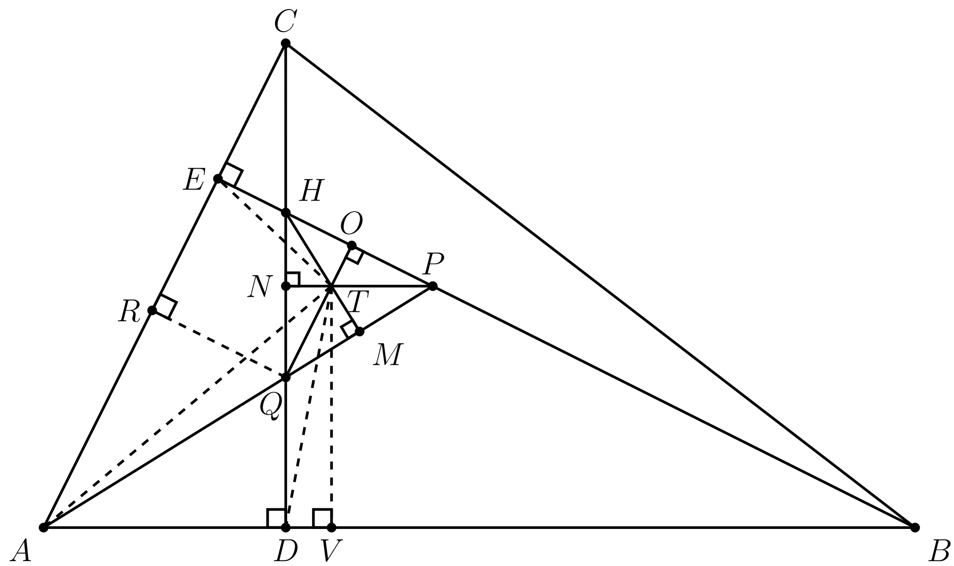
$$\frac{AB}{AN} = \frac{BC}{NL} = \frac{AC}{AL} = 2 \quad \text{y} \quad \frac{CB}{CM} = \frac{AB}{LM} = \frac{AC}{CM} = 2.$$

Entonces N y M son puntos medios de AB y BC, respectivamente.

6. [**1**(1) (2020) p. 73.] Sea ABC un triángulo escaleno y acutángulo. Se trazan las alturas BE y CD que se intersectan en H. La bisectriz del ángulo $\angle BAC$ intersecta a las alturas BE y CD en P y Q, respectivamente. Sea T el ortocentro del triángulo HPQ, pruebe que los triángulos TDA y TAE tienen igual área.
(Jorge Tipe, Olimpiada Rioplatense 2018)

Solución de Martín Andonegui Zabala, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela.

Sea α la medida de los ángulos $\angle QAD$ y $\angle EAQ$ y β la medida del ángulo $\angle AQD$. En el triángulo HPQ, trazamos las alturas HM, PN y QO.



Entonces $\alpha + \beta = 90°$ y $\angle HQP = \beta$. Notamos que los triángulos ADQ y AEP son semejantes por tener los tres ángulos congruentes. Por consiguiente, $\angle HQP = \angle HPQ$ y el triángulo HQP es isósceles. Su tercer ángulo es $\angle QHP = 180° - 2\beta = 2\alpha$. Ahora bien, en el triángulo HQP, la altura HM es también bisectriz y por lo tanto $\angle QHM = \angle PHM = \alpha$. Además, los triángulos QPO y PQN son congruentes por tener los tres ángulos congruentes (90°, α y β) y un lado común (QP). De aquí se sigue que

$$NP = OQ. \tag{1}$$

Además $PN \parallel AD$, ya que ambos son perpendiculares a la altura CD. Por consiguiente, los triángulos ADQ y PNQ son semejantes, lo que permite establecer la proporción $NQ/QD = NP/AD$, de donde $AD \cdot NQ = QD \cdot NP$ y, por (1), se obtiene

$$AD \cdot NQ = QD \cdot OQ. \tag{2}$$

Por otro lado, al trazar el segmento RQ perpendicular a EA, se obtiene que el cuadrilátero $RQOE$ es un rectángulo, de donde se derivan las igualdades

$$OE = RQ \quad \text{y} \quad OQ = ER. \tag{3}$$

Obsérvese también que RQ es paralelo a la altura del triángulo TEA con respecto al lado EA y tiene su misma medida.

Además, $\triangle AQR$ y $\triangle AQD$ son congruentes por tener los tres ángulos congruentes ($90°$, α y β) y un lado común (AQ), de donde se sigue

$$AR = AD \quad \text{y} \quad RQ = QD. \tag{4}$$

Finalmente,

$$EA = ER + AR \quad \text{y} \quad TV = NQ + QD \tag{5}$$

Con todos los datos anteriores pasamos a determinar las áreas de $\triangle TEA$ (base EA y altura RQ) y $\triangle TDA$ (base AD y altura TV):

$$\begin{aligned}
[TDA] &= \frac{1}{2}AD \cdot TV = \frac{1}{2}AD(NQ + QD) = \frac{1}{2}(AD \cdot NQ + AD \cdot QD) \\
&= \frac{1}{2}(QD \cdot OQ + AD \cdot QD), \\
[TEA] &= \frac{1}{2}EA \cdot RQ = \frac{1}{2}(ER + AR)QD = \frac{1}{2}(OQ + AD)QD \\
&= \frac{1}{2}(OQ \cdot QD + AD \cdot QD).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $[TDA] = [TEA]$.

José Nieto jhnieto@gmail.com
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Jorge Tipe jorgetipe@gmail.com
Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, Perú.