ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 3 No. 1/2 (2022), pp. 1–7

Algunas variaciones del rompecabezas del 15 de Sam Loyd

Gyivan Erick López Campos

Resumen

En este artículo analizaremos algunas variaciones del popular juego llamado rompecabezas del 15 por medio de permutaciones. Este árticulo es de divulgación y su objetivo es hacer notar que no se necesitan grandes conocimientos para hacer cosas matemáticamente sorprendentes y que siempre se pueden crear variaciones de lo existente, pudiendo crear cosas sumamente interesantes.

Palabras y frases clave: rompecabezas del 15, permutaciones, paridad, inversiones, sucesiones.

Some variations of Sam Loyd's 15 puzzle

Abstract

In this article we are going to analyse some variations of the popular game called The 15th-puzzle by permutations. The main goal of this article is to show that it is not required to know advanced mathematics in order to do wonderful things and always we can propose variations of the things we know and create something entirely new.

Key words and phrases: The 15th puzzle, permutations, parity, inversions, successions.

1 Introducción

Sam Loyd fue un ajedrecista, autor de rompecabezas, matemático recreativo y uno de los más grandes creadores de acertijos de Estados Unidos de América.

Comenzó a estudiar ingeniería civil hasta que abandonó sus estudios por volverse ajedrecista profesional. Llegó a ser el quinceavo mejor ajedrecista del mundo, siempre buscando jugadas complejas y bellas que asombraban al mundo.

En 1878 Loyd propuso el popular rompecabezas denominado *rompecabezas del 15* o *The 15th-puzzle*, que en su momento creó gran conmoción y hasta nuestros días sigue generando mucho interés en nuestra sociedad.

En este artículo analizaremos dos variaciones del rompecabezas del 15, cambiando el diseño original del tablero, siguiendo ideas muy parecidas a las establecidas en [3][1]

2 El rompecabezas del 15

El rompecabezas del 15 fue publicado por Sam Loyd en [2] en la página 235 (figura 1) y aunque en esta publicación Sam Loyd ofrecía 1000 dolares, realmente en la página 6 (figura 2) del libro se especificaba que se darían 100 dolares a aquellos que resolvieran los llamados *price puzzles*. De cualquier manera, ofrecer una recompensa que en ese tiempo era una cantidad considerable de dinero sonaba muy tentador para cualquiera que gustara de resolver acertijos.

Figura 1: Extraída de [2]

A PRIZE OFFER

A number of puzzles in the book have been selected as **"Prize Puzzles,"** so of course their solutions are withheld.

A prize of one hundred ($100) dollars will be awarded to the person who sends in the best set of correct answers to these "Prize Puzzles" **before the first of January, 1915.**

A feature of the contest lies in the fact that each solver must in the first place discover the "Prize Puzzles," which can be identified through the absence of their solutions, so do not write and ask which they are. That is for you to find out.

As the reader proceeds through the book he should make notes of such puzzles as he discovers have no given solutions. If complete, that will be the list of "Prize Puzzles."

There are no conditions attached to this prize offer other than that a contestant's solutions must be sent collectively—the answers to the complete set of "Prize Puzzles" forwarded in one envelope, and posted not earlier than December 1, 1915, and not later than January 1, 1915, addressed to SAM LOYD, New York Press Club, New York City.

If you do not succeed in securing answers to all of the "Prize Puzzles," nevertheless be sure to send in your best efforts, for a number of complimentary prizes will be awarded among those who rank highest in the contest.

The first prize of $100 will go to the author of the best received. Best means best from every possible standpoint, correctness, method of expression, etc.

Mr. Loyd will personally superintend examination of all answers.

To be eligible to enter this contest it is not necessary to own outright a copy of the Cyclopedia of Puzzles. Several members of a family may send in their individual papers while working from the same volume.

6

Figura 2: Extraída de [2]

Originalmente, el rompecabezas del 15 constaba de 15 fichas numeradas del 1 al 15 y ordenadas como en la figura 3 dentro de una cajita de madera. Estas fichas solo se pueden desplazar horizontal y verticalmente, una a la vez ocupando el espacio vacio. A estos desplazamientos les llamaremos *movimientos válidos*. El objetivo era simple, lograr la posición de la figura 4 mediante movimientos válidos.

Como era de esperarse, esto no se puede lograr mediante movimientos válidos, por lo que Sam Loyd estaba mas que seguro que nunca iba a tener que pagar dicho premio. En el siguiente capítulo explicaremos mas a detalle la imposibilidad de este hecho.

Actualmente se puede encontrar este rompecabezas en muchas tiendas de juguetes, aunque normalmente lo encontraremos con la posición de la figura 4 como configuración inicial, y en la parte posterior del rompecabezas diferentes retos a lograr, entre ellos la posición de la figura 3 que popularmente se le conoce como *imposible*.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Figura 3

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Figura 4

3 El caso de n filas y m columnas

Como matemáticos siempre buscamos variaciones de problemas ya existentes para ver si las mismas estrategias que se han usado en casos previos continuan funcionando y de esta manera conseguir resultados más generales.

Un caso que se encuentra parcialmente desarrollado en la literatura es el siguiente. Imaginemos ahora que tenemos un tablero con n filas y m columnas, con $n, m \geq 2$ y las fichas ordenadas del 1 al $nm-1$ con la casilla vacia en la esquina inferior derecha. La pregunta ahora sería, ¿podremos cambiar la ficha con el número $nm-1$ con la ficha con el número $nm-2$?

Podemos aplicar el mísmo método que en [3], asignar una permutación a la configuración inicial (la ordenada) y la de destino. Nuevamente ambas permutaciones tendrán paridad diferente, entonces todo parece que se aplica de la misma manera.

El movimiento horizontal nuevamente no afecta la paridad de la permutación, sin embargo el vertical ahora provocará que la ficha que se mueva se adelante o atrase m números. Si suponemos que el número a mover tiene tiene k inversiones con los m números que adelantará o atrasará, entonces tiene $m-k$ sucesiones con estos mismos números. Luego al mover la ficha, se estarán generando $m-k$ inversiones, pero se estarán perdiendo k. Luego el total de nuevas inversiones que tenemos es $(m-k)-k = m-2k$.

Finalmente, como la casilla vacia tendrá que bajar las mismas veces que tendrá que subir, entonces se tendrán que ejecutar una cantidad par de movimientos, lo cual generará que la paridad cambie o no un par de veces (depende de la paridad de m)

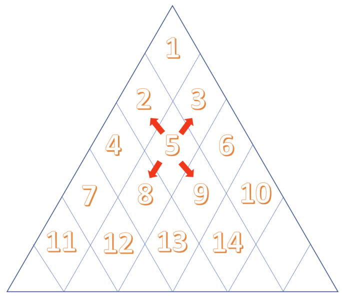

Figura 5

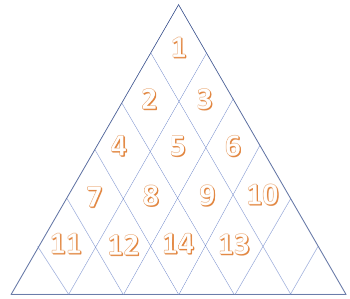

Figura 6

pero en ambos casos la paridad original se va a mantener. Por lo tanto, no es posible cambiar la ficha $nm-1$ por la ficha $nm-2$ en general.

Con esto podemos observar que el tamaño original del juego realmente no afectaba el resultado, Sam Loyd nunca hubiera tenido que pagar la recompensa independientemente del tablero.

Mohammed Almulla y Monty Newborn publicaron en la página `https://www.cs.mcgill.ca/~newborn/nxp_puzzleOct9.htm` algunos resultados interesante a cerca de este caso, pero hasta este momento no han sido publicados en revistas indexadas.

Nos podemos hacer ahora la pregunta que se aborda en [4] sobre la mínima cantidad de movimientos necesarios para que de cualquier posición en el rompecabezas de n filas y m columnas. Con respecto a las posiciones alcanzables, ¿se pueda llegar a cualquier otra posición mediante movimientos válidos?, ¿la estrategia es la misma que en [1]?

4 Una variación del tablero

Ahora propongamos una alteración a la forma del tablero y los movimientos válidos. Por ejemplo, supóngase el tablero y configuración inicial como en la figura 5.

Los movimiento válidos ahora serán mover un número a la casilla superior o inferior adyacente diagonalmente, siempre y cuando se encuentre el espacio vacío en el lugar donde se desea mover el número. En la figura 5 también se muestran algunos ejemplos de los movimientos válidos.

Comencemos con una pregunta análoga al rompecabezas del 15, ¿se puede llegar de la figura 5 a la figura 6? La respuesta es nuevamente que no. Para entender esto, hagamos un renombramiento de los números en el tablero como se muestre en la figura 7. Entonces el objetivo sería cambiar el 12 y 14 de lugar. Si logramos esto, claramente obtendríamos lo que queremos.

ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 3 No. 1/2 (2022), pp. 1–7

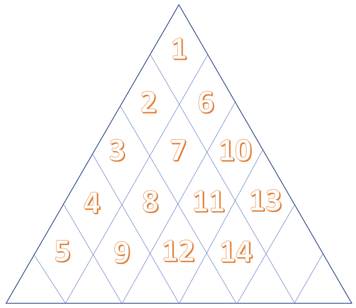

Figura 7

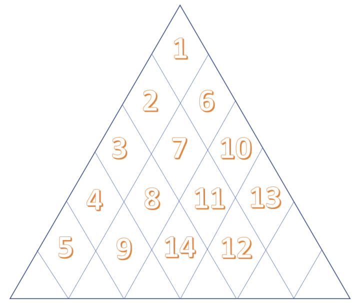

Figura 8

Pero, ¿por qué la clave está en reenombrar las fichas? Nuevamente pensemos en el número de inversiones que hay en el tablero, pero vistas de manera diagonal, de arriba a abajo, de izquierda a derecha. Podemos observar que en la figura 7 no hay inversiones, y en la figura 8 hay tres inversiones. ¿Podemos llegar de una posición con un número par de inversiones a otra con un número par de inversiones?

Veamos como se altera el número de inversiones con cada movimiento. Si la ficha se desplaza derecha-arriba o izquierda-abajo, entonces en número de inversiones se mantiene y por lo tanto no cambia su paridad.

Con las diagonales ascendentes numeradas de izquierda a derecha desde 1, si una ficha de la diagonal n se desplaza derecha-abajo, entonces saltará a las siguientes $n-1$ fichas. Y si la ficha tenía k_1 inversiones con las siguientes $n-1$ fichas, entonces estas k_1 inversiones desaparecerán, pero en su lugar aparecerán $n-1-k_1$ inversiones nuevas, por lo que el número total de inversiones variará en $n-1-2k_1$. Análogamente si una ficha se mueve izquierda-arriba desde la diagonal $n+1$ a la diagonal n, entonces pasará sobre $n-1$ fichas y el número total de inversiones variará en $n-1-2k_2$. Pero por cada movimiento de la diagonal n a la $n+1$ debe haber un movimiento de la diagonal $n+1$ a la n, y la variación del número de inversiones debida a estos dos movimientos será $n-1-2k_1+n-1-2k_2 = 2(n-1-k_1-k_2)$, un número par.

Entonces la paridad de la permutación tendrá que ser la misma que la de la posición original, si queremos que la casilla vacia termine en la misma posición.

En particular, no es posible, llegar de la figura 7 a la figura 8.

Notemos que sin importar el tamaño de tablero, si tenemos m diagonales, entonces un razonamiento parecido al anterior seguirá funcionando y por lo tanto no va a ser posible cambiar el $\frac{m(m+1)}{2}-1$ y el $\frac{m(m+1)}{2}-2$ de lugar.

Así como en el rompecabezas del 15, es válido preguntarse entonces dada una configuración inicial, cuáles son las configuraciones alcanzables mediante movimientos válidos como se plantea en [1].

En este caso, el tablero restringe mucho las posiciones alcanzables, pues observemos que la ficha 10 y 11 solo se podrán mover una posición arriba-izquierda y arriba-derecha respectivamente, pues al momento de moverse dejarán a la casilla vacia en la esquina del triángulo, lo cual no permitirá que estas fichas puedan moverse mas allá. Por lo tanto, no se respeta la paridad como en [1].

5 Conclusiones

Este es un bonito problema que ilustra que una buena técnica puede ayudar a resolver diferentes variantes del problema. Además este problema muestra que hacer matemáticas no es hacer operaciones extrañas y complejas. Basta hacer observaciones y proposiciones lógicas para llegar a resultados matemáticamente importantes.

Como comentario adicional, las permutaciones no se restringe únicamente a este tipo de problemas. De hecho es un término muy importante en álgebra moderna que puede ser aplicado para muchas cosas más, se puede revisar [5] para mas detalles de permutaciones.

Para concluir, se proponen las siguientes preguntas interesantes relacionadas a estas ideas:

- ¿Habrá algún criterio para determinar que posiciones son alcanzables en el caso del tablero triangular?

- Si tuvieramos dos casillas vacias, ¿Cambiaría mucho el problema?, ¿Y con n casillas vacias?

- Si quisieramos saber si podemos llegar de una posición a otra en el famoso cubo Rubik mediante los movimientos permitidos, ¿Podríamos aplicar una técnica parecida? ¿Cómo?

6 Agradecimientos

Agradezco al Dr. Leonardo Martínez de la Facultad de Ciencias (UNAM) por la invitación a mandar este árticulo y a los editores de esta revista que hacen un estupendo trabajo por divulgar matemáticas.

Referencias

[1] Archer, A. F., *A modern treatment of the 15 puzzle*, The American Mathematical Monthly **106**(9) (1999), 793–799.

[2] Loyd, S., *Cyclopedia of puzzles*, Lamb Publishing Company, 1986.

[3] Nieto, J.H., *Permutaciones y el Juego del 15*, Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. **XII**(2) (2005), 259–264.

[4] Ratner, D. and Warmuth, M., *Finding a shortest solution for the $N \times N$ extension of the 15-PUZZLE is intractable.*, AAAI-86. (1986), 168–172.

[5] Dummit, David S and Foote, Richard M. , *Abstract algebra*, Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ. (1991).

Gyivan Erick López Campos (gyivan.lopez@im.unam.mx)
Instituto de Matemáticas (UNAM)