ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 3 No. 1/2 (2022), pp. 25–40

Problemas de Lógica en Competiciones Matemáticas

José Heber Nieto Said

Resumen

En este artículo se examinan problemas y acertijos lógicos de varios tipos, con especial referencia a los propuestos en competiciones matemáticas.

Palabras y frases clave: problemas lógicos, competiciones matemáticas, veraces y mentirosos, caballeros y pícaros, tablas de verdad.

Logic Problems in Mathematical Competitions

Abstract

In this paper we examine logic problems and puzzles of several kinds, with special reference to those proposed in mathematical competitions.

Key words and phrases: logic problems, mathematical competitions, truth-tellers and liars, knights and knaves, truth tables.

1 Introducción

Desde la antigüedad abundan los problemas, acertijos y paradojas lógicas. Se atribuye a Eubúlides de Mileto (s. IV a. C.) haber dicho:

> Un hombre afirma que está mintiendo. ¿Lo que dice es verdadero o falso?

Si dice la verdad, entonces está mintiendo. Y si miente, entonces dice la verdad. Esta es una de las múltiples formas que adopta la llamada *paradoja del mentiroso*. Otra versión es la siguiente:

> Esta oración es falsa.

Si esa oración es verdadera, entonces lo que dice es verdad, y por lo tanto es falsa. Y si es falsa, entonces es verdadera. Esto muestra que a la oración en cuestión no se le puede asignar un valor de verdad (verdadero o falso) sin caer en contradicción. Esta oración es un ejemplo de *autoreferencia*, la cual suele conducir a situaciones paradójicas.

Hay infinidad de enunciados, muchos de los cuales se usan en el lenguaje común, a los que no se les puede asignar un valor de verdad a pesar de ser gramaticalmente correctos. Esto incluye las órdenes, las interjecciones, expresiones como "¡Ojalá mañana salga el sol!", etc. Y en el lenguaje poético abundan los enunciados a los que no se les puede atribuir un significado unívoco, y mucho menos un valor de verdad. Pero a veces esto ocurre solo en apariencia, como en el siguiente ejemplo.

Se atribuye a Epiménides (siglo VI a. C.) haber afirmado:

> Los cretenses siempre mienten.

Pero Epiménides era cretense, por lo tanto si dijo la verdad entonces mintió, contradicción. A veces se cita este ejemplo como una paradoja, pero en realidad no lo es, ya que hay otra posibilidad, a saber, que algún cretense no mienta siempre y que Epiménides en esta ocasión haya mentido, con lo cual el enunciado es falso y no hay ninguna contradicción.

En lo que sigue nos limitaremos a considerar enunciados a los que sí se les puede asignar un valor de verdad. A estos enunciados les llamaremos *proposiciones*.

Los problemas que consideraremos en este artículo giran en torno a la veracidad o falsedad de ciertos enunciados, y a si los que los emiten mienten o dicen la verdad. Hay una gran variedad de acertijos y problemas en los que aparecen personajes *que siempre mienten* (y a los cuales se les suela llamar *pícaros*, *falaces* o simplemente *mentirosos*) y otros *que siempre dicen la verdad'* (y a los cuales se les llama *caballeros*, *veraces* u *honestos*). Aunque por lo general no es necesaria tanta precisión, en sentido estricto un veraz o un mentiroso no puede decir enunciados que no sean proposiciones. Y en particular ninguno de ellos puede decir "Yo soy mentiroso", ya que si lo dice un mentiroso, estaría diciendo la verdad, y si lo dice un veraz, estaría mintiendo. En algunos problemas aparecen también personajes *normales*, que tanto pueden mentir como decir la verdad. El maestro indiscutido de este tipo de problemas fue Raymond Smullyan, quien escribió varios libros muy populares ([6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13] entre otros) en los cuales, a través de este tipo de acertijos, no solo divierte y entretiene sino que enseña lógica y conduce gentilmente al lector a los fundamentos de temas importantes como el teorema de incompletitud de Gödel, las paradojas de Russell, las álgebras booleanas o los problemas del infinito matemático.

Aunque las áreas tradicionales de las olimpiadas matemáticas son Álgebra, Combinatoria, Geometría y Teoría de Números, en estas competencias suelen aparecer problemas lógicos, que usualmente se clasifican como de Combinatoria. En el Canguro Matemático, en cambio, los problemas se clasifican en Álgebra, Geometría, Lógica y Números, pero la mayoría de los problemas del tema Lógica son en realidad de

Combinatoria. De todas maneras algunos problemas del Canguro son verdaderamente de Lógica. Y por supuesto en todas las competiciones aparecen problemas mixtos, en los cuales una parte es lógica y otra tiene que ver con combinatoria, números o algún otro tema.

2 Ejemplos de problemas lógicos

Problema 1. Cada habitante de una isla es o bien *veraz* (y siempre dice la verdad) o bien *mentiroso* (y siempre miente). Un día un náufrago llega a esta isla y se encuentra con tres nativos. Se acerca al primero de ellos y le pregunta "¿Eres mentiroso?". Éste responde la pregunta, pero el náufrago no alcanza a escuchar la respuesta. El segundo nativo, dándose cuenta de este hecho, informa que el primero respondió que No. Pero el tercer nativo informa al náufrago que el primer nativo es realmente mentiroso. ¿Qué es cada nativo?

Solución: A la pregunta "¿Eres mentiroso?" solo se puede responder que No. En efecto, un veraz dirá que no es mentiroso, y un mentiroso no puede responder Sí pues estaría diciendo la verdad. Luego el primer nativo respondió No, el segundo nativo dijo la verdad y el tercero mintió.

Problema 2. A la misma isla llega un misionero y se encuentra con dos nativos, uno alto y otro bajo. "¿Eres de los que dicen la verdad?", le pregunta al más alto. Éste le responde "WOK". El misionero reconoce la palabra como un vocablo nativo que significa Sí o No, pero no recuerda cuál de las dos. El bajito habla castellano, así que el misionero le pregunta que había dicho su compañero. "Ha dicho SI, pero él es mentiroso", dijo el bajito.

¿Qué es cada uno de los nativos?

Solución: A la pregunta "¿Eres veraz?" solo se puede responder Sí. En efecto, un veraz dirá que sí es veraz, y un mentiroso no puede responder "No" pues estaría diciendo la verdad. Luego el alto respondió Sí, el bajito dijo la verdad y es veraz, y el alto es mentiroso.

Problema 3. En [14] Raymond Smullyan cuenta que planteó a una chica que le gustaba lo siguiente: "Yo voy a hacer un enunciado. Si es verdadero, me darás un autógrafo. Si es falso, no me darás un autógrafo. ¿Estás de acuerdo?" La chica, ingenuamente, respondió que sí, que no veía ninguna razón para no estar de acuerdo. Entonces Smullyan dijo: "Tú no me darás ni un autógrafo ni un beso". ¿Qué se sigue de esto?

Solución: Si el enunciado es verdadero, la chica, según lo acordado, debería darle un autógrafo. Pero esto contradice al enunciado (verdadero) que dice que no le dará el autógrafo. Luego el enunciado debe ser falso. Eso significa que la chica le dará un autógrafo o un beso. Pero no puede darle un autógrafo, ya que el enunciado es falso. ¡Por lo tanto debe darle un beso!

Problema 4. (OJM 2009, Venezuela, Prueba regional)

En cierta isla, los habitantes son de dos tipos: los *caballeros*, que siempre dicen la verdad, y los *pícaros*, que siempre mienten. Un día se encuentran reunidos tres nativos de la isla llamados Apu, Bop y Cip. Apu dice "Los tres somos pícaros". Bop dice "Exactamente uno de nosotros es caballero". Cip no dice nada. ¿Qué es cada uno de ellos?

Solución: Apu y Cip son pícaros y Bop es caballero. En efecto, Apu no puede ser caballero pues entonces su afirmación sería falsa. Por lo tanto, Apu es pícaro y es falso que los tres sean pícaros, es decir que al menos uno de los otros dos es caballero. Si Bop fuese pícaro, entonces Cip debería ser caballero, y habría exactamente un caballero, haciendo cierta la afirmación de Bop (contradicción). Entonces Bop debe ser caballero, y Cip pícaro.

Problema 5. (Canguro 2021, nivel Benjamin)

A tres piratas se les preguntó cuántas monedas y cuántos diamantes tenía su amigo Barbagris. Cada uno de los tres respondió con la verdad a una de las preguntas y mintió respondiendo la otra. Sus respuestas fueron las siguientes:

(1) Barbagris tenía 8 monedas y 6 diamantes.
(2) Barbagris tenía 7 monedas y 4 diamantes.
(3) Barbagris tenía 7 monedas y 7 diamantes.

¿Cuál es el número total de monedas y de diamantes que tenía Barbagris?

(A) 11; (B) 12; (C) 13; (D) 14; (E) 15.

Solución: Como (2) y (3) dan respuestas diferentes sobre el número de diamantes, éstas no pueden ser ambas verdaderas. Luego una de ellas es falsa, y por lo tanto es verdad que Barbagris tenía 7 monedas. Luego la afirmación de (1) sobre el número de monedas es falsa y entonces es verdad que Barbagris tenía 6 diamantes. El número total pedido es $7 + 6 = 13$.

Problema 6. (Canguro 2021 nivel Benjamin)

En un grupo de 10 elfos y orcos, a cada uno se le dio una ficha con un número diferente del 1 al 10 escrito en ella. A cada uno se le preguntó qué número estaba en su ficha y todos respondieron con un número de 1 a 10. La suma de las respuestas fue 36. Cada orco mintió y cada elfo dijo la verdad. ¿Cuál es el menor número de orcos que podría haber en el grupo?

(A) 1; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 7.

Solución: Si todos son elfos, las respuestas serían los enteros del 1 al 10 cuya suma es 55. Si hay un solo orco, la suma mínima se obtiene si el orco tiene el 10 pero dice que tiene el 1. En ese caso la suma sería $55 - 9 = 46$. Con dos orcos la suma mínima se obtiene si los orcos tienen los números 9 y 10 pero dicen 1. En ese caso la suma sería al menos $55 - 17 = 38$. Por lo tanto para que la suma sea 36 debe haber al menos 3 orcos. Por ejemplo si 7 elfos tienen los números del 1 al 7 y los orcos tienen 8, 9 y 10, pero dicen que tienen 1, 2 y 5, entonces la suma de las respuestas es 36.

Problema 7. (OJM Venezuela, 2017)

Ana, Berta y Claudia son hermanas. Una de ellas es *veraz* (siempre dice la verdad), otra es *embustera* (siempre miente) y otra es *normal* (a veces dice la verdad y a veces miente). Un día una de ellas dijo: "Yo siempre miento". Otra le respondió: "Eso es falso. La que siempre miente es Ana". Y la que no había hablado dijo: "La que siempre dice la verdad es Clara". Diga los nombres de las hermanas en el orden en que hablaron, y diga qué es cada una de ellas (veraz, embustera o normal).

Solución: Ni la veraz ni la mentirosa pueden haber dicho "Yo siempre miento". Luego la primera que habló es normal (y en esta ocasión mintió). La segunda al decir "Eso es falso" dijo la verdad, luego ella es la veraz. Y su segunda afirmación es verdadera, por lo cual la mentirosa es Ana. La tercera es la mentirosa, luego Clara no es la veraz. Entonces Berta es la veraz y Clara la normal. El orden en que hablaron es: Clara (normal), Berta (veraz), Ana (mentirosa).

Problema 8. (Canguro 2017, nivel Benjamin)

Catorce chicos están sentados alrededor de una mesa redonda. Cada uno de ellos es mentiroso (y siempre miente) o es honesto (y siempre dice la verdad). Cada uno de ellos dice: "Mis dos vecinos son ambos mentirosos". ¿Cuál es el máximo número de mentirosos que puede haber en la mesa?

(A) 14; (B) 10; (C) 7; (D) 8; (E) 9.

Solución: La respuesta correcta es la (E). No hay 3 mentirosos consecutivos (pues en ese caso el del medio estaría diciendo la verdad), luego a lo sumo puede haber 2 mentirosos consecutivos y el máximo número de mentirosos se logra con la disposición MMHMMHMMHMMHMH, 9 mentirosos.

Problema 9. (Canguro 2017, nivel Student)

Cada una de las 2017 personas que viven en una isla es o bien mentiroso (y siempre miente) o bien veraz (y siempre dice la verdad). Más de 1000 de ellos asisten a un banquete y se sientan alrededor de una mesa redonda. Cada uno de ellos dice: "De las dos personas que están sentadas junto a mí, una es mentirosa y la otra es veraz". ¿Cuantas personas veraces, como máximo, hay en la isla?

(A) 1683; (B) 668; (C) 670; (D) 1344; (E) 1343.

Solución: Si los que asistieron al banquete son todos mentirosos, entonces los veraces están entre los que no asistieron, que son a lo sumo $2017 - 1001 = 1016$.

Si hay un veraz entre los que asistieron al banquete, entonces uno de sus vecinos es veraz (digamos que el de la izquierda) y el otro mentiroso. A su vez el mentiroso debe tener otro veraz al otro lado, pues en caso contrario estaría diciendo la verdad. Por lo tanto, la disposición en la mesa debe ser VVMVVM...

Eso significa que el número de personas en la mesa debe ser múltiplo de 3, y debe ser al menos 1002, de los cuales la tercera parte son mentirosos. Si no hay más mentirosos en la isla, tenemos un total de $1002/3 = 334$ mentirosos, por lo que el número máximo de veraces en esas condiciones será de $2017 - 334 = 1683$ (opción A).

Problema 10. (OJM Regional, Venezuela, 2019)

En una isla hay 2019 habitantes. Cada uno de ellos o bien es honesto y siempre dice la verdad, o bien es mentiroso y siempre miente. Un día se sientan todos alrededor de una gran mesa redonda y cada uno de ellos dice: "Uno de mis vecinos es honesto y el otro es mentiroso". Si se sabe que al menos uno de ellos es honesto, ¿cuántos mentirosos hay?

Solución: Consideremos un honesto y asignémosle el número 1. Asignemos el número 2 al vecino honesto de 1, y continuemos numerando a los isleños en la misma dirección con 3, 4,... hasta llegar al 2019, que será el vecino mentiroso de 1. Como 2 es honesto y 1 también, entonces 3 es mentiroso. Como 3 es mentiroso y 2 es honesto, 4 debe ser honesto (pues si fuese mentiroso, 3 estaría diciendo la verdad). Ahora 5 debe ser honesto, 6 mentiroso, 7 honesto,... y se ve que que todos los múltiplos de 3 son mentirosos y los demás honestos. Luego hay $2019/3 = 673$ mentirosos.

3 Tablas de verdad

A partir de proposiciones p y q se pueden formar otras proposiciones, combinándolas mediante *conectivas lógicas*. Por ejemplo $p \wedge q$ representa la *conjunción* p y q, que es verdadera si y sólo si p y q son ambas verdaderas, mientras que $p \vee q$ representa la *disyunción* p o q, que es verdadera si y sólo si al menos una de las proposiciones p y q es verdadera. Además representaremos mediante $\neg p$ la *negación* de p, que es verdadera si p es falsa y falsa si p es verdadera. El significado de estas tres conectivas $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ se resume en las siguientes *tablas de verdad*, donde V representa verdadero y F falso:

p	$\neg p$
V	F
F	V

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Otras conectivas importantes son: el *condicional* $p \to q$ (si p entonces q), que es verdadera excepto cuando p es verdadera y q falsa; el *bicondicional* $p \leftrightarrow q$ (p si y sólo si q, que a veces se abrevia como p ssi q), que es verdadera solo cuando p y q son ambas verdaderas o ambas falsas; el *O exclusivo* $p \oplus q$, que es verdadera cuando una y solo una de p y q es verdadera. La siguiente tabla de verdad muestra la definición precisa de estas conectivas.

p	q	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
V	V	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	F

Una *tautología* es una proposición que siempre es verdadera. Por ejemplo $p \vee \neg p$ y $p \to p$ son tautologías, como muestra la siguiente tabla:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \to p$
V	F	V	V
F	V	V	V

El bicondicional se puede representar también con el símbolo $\equiv$, pues $p \leftrightarrow q$ significa que, desde el punto de vista de sus valores de verdad, p y q son equivalentes.

Una propiedad interesante de las conectivas $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ y $\oplus$ es que son *asociativas*, es decir que

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$$
$$(p \oplus q) \oplus r \equiv p \oplus (q \oplus r)$$

Esto se puede probar calculando las tablas de verdad. Lo haremos para $\leftrightarrow$ (para las demás conectivas es similar).

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	$q \leftrightarrow r$	$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	V	F

Otras equivalencias importantes son $\neg\neg p \equiv p$ (ley de la doble negación), $p \to q \equiv \neg p \vee q$, $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ y $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (leyes de De Morgan).

Problema 11. En cierta isla cada habitante o bien es *veraz* (y siempre dice la verdad) o bien es *mentiroso* (y siempre miente). Un lógico llega a la isla y quiere ir a la capital, pero llega a una bifurcación de caminos y no sabe si debe seguir por el de la derecha o por el de la izquierda. Uno de los caminos conduce a la capital y el otro a una madriguera de leones. Allí hay dos nativos y uno de ellos dice: “La capital está en la montaña o el camino de la derecha conduce a la capital”. El otro dice: “La capital está en la montaña y el camino de la derecha conduce a la capital”. El primero, señalando al segundo, dice: “Ese hombre miente”. El segundo replica: “Si la capital está en la montaña entonces el camino de la derecha conduce a la capital”. ¿Puede el lógico deducir qué camino debe seguir?

Solución: Sea p la proposición “La capital está en la montaña” y sea q la proposición “El camino de la derecha conduce a la capital”. Sean A y B el primer y el segundo nativo. Formemos la siguiente tabla de verdad:

p	q	A: $p \vee q$	B: $p \wedge q$	B: $p \to q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	V
F	F	F	F	V

Como B no puede dar una respuesta verdadera y otra falsa, las líneas 3 y 4 de la tabla se desechan. Quedan las líneas 1 y 2, en las cuales A dijo la verdad. Por lo tanto A es veraz, y como dijo que el segundo miente, B es mentiroso. Luego la única posibilidad la da la línea 2, que muestra que p es verdadera y q falsa, es decir que la capital está en la montaña y el camino de la izquierda es el que conduce a la capital.

En [1] pueden verse otros problemas interesantes resueltos con estas técnicas.

Problema 12. En cierta isla cada habitante o bien es *veraz* (y siempre dice la verdad) o bien es *mentiroso* (y siempre miente). En la isla se utiliza un peculiar método para impartir justicia: un guardia lleva al acusado a una encrucijada de caminos en el bosque, uno de los cuales conduce a una madriguera de leones hambrientos y el otro a la libertad. El detenido tiene derecho a formular una sola pregunta al guardia, el cual responderá Sí o No. Naturalmente el detenido no sabe si el guardia es veraz o mentiroso. ¿Hay alguna pregunta que pueda hacer el detenido que le permita lograr la libertad con toda seguridad?

Solución: Una posibilidad consiste en hacer la pregunta:

> Si yo le preguntase si el camino de la derecha conduce a la libertad, qué me respondería?

Supongamos que el camino de la derecha es el que conduce a la libertad. Si el guardia es veraz, obviamente responderá que sí. ¡Pero si es mentiroso también responderá que sí! En efecto, como es mentiroso, *si le preguntasen* si el camino de la derecha conduce a la libertad, respondería que no. Pero no le están preguntando eso, sino *qué respondería* si se lo preguntasen. Entonces si dice que no, estaría diciendo la verdad, lo que no puede hacer. Luego responderá que sí.

Si en cambio el camino que conduce a la libertad es el de la izquierda, un guardia veraz respondería que no y uno mentiroso también. Es decir que en cualquier caso una respuesta afirmativa significa que el camino que conduce a la libertad es el de la derecha, mientras que una respuesta negativa indica que es el de la izquierda.

Lo anterior se puede resumir en la siguiente tabla, donde p es “El camino de la derecha conduce a la libertad”, q es “El guardia es veraz”, P es la pregunta “¿Es p verdadera?” y P' es la pregunta “Si yo le preguntase si p es verdadera, ¿me respondería que Sí?”.

p	q	P	P'
V	V	Sí	Sí
V	F	No	Sí
F	V	No	No
F	F	Si	No

Observemos que la solución anterior permite averiguar, con una sola pregunta, si una proposición p cualquiera es verdadera o falsa. Sin embargo, puede ser objetada porque no pregunta por hechos reales, sino por una situación hipotética o imaginada planteada en el modo subjuntivo ("Si yo le preguntase. . . "). . A este tipo de preguntas algunos autores les llaman *contrafactuales*. Veamos otra solución que no las usa.

Solución alternativa: Si al guardia se le pregunta si una proposición p es verdadera, él responderá afirmativamente si p es verdadera y él es veraz, o si p es falsa y él es mentiroso. Es decir que si q es la proposición "El guardia es veraz" y preguntamos al guardia por p, su respuesta nos permitirá determinar el valor de verdad de $p \leftrightarrow q$. Ahora si le preguntamos por $p \leftrightarrow q$, su respuesta nos dará el valor de verdad de

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow (q \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow V \equiv p$$

(aquí usamos la asociatividad de $\leftrightarrow$ y el hecho de que $q \leftrightarrow q$ es una tautología).

Ahora $p \leftrightarrow q$ es la proposición "p es verdadera si y sólo si el guardia es veraz". Es decir que si el detenido pregunta al guardia

> ¿El camino de la derecha conduce a la libertad si y sólo si usted es veraz?

o equivalentemente

> ¿El camino de la derecha conduce a la libertad y usted es veraz o el camino de la derecha conduce a los leones y usted es mentiroso?

entonces una respuesta afirmativa significa que el camino de la derecha es el que conduce a la libertad, mientras que una respuesta negativa significa que el camino de la izquierda es el que conduce a la libertad,

El problema anterior admite muchas variantes. En la película Labyrinth (1986) de Jim Henson, con David Bowie y Jennifer Connelly, la protagonista (Sarah) se encuentra ante dos puertas, cada una custodiada por un guardia. Una puerta conduce al castillo, adonde ella quiere ir, y la otra a una muerte segura. Uno de los guardias miente y el otro dice la verdad, pero no se sabe cuál es el que dice la verdad. Sarah puede hacer una sola pregunta a uno de los guardias, que responderá Sí o No. En la película Sarah hace al guardia de la puerta izquierda la pregunta contrafactual "¿El otro guardia me diría que esta puerta conduce al castillo?". El guardia le responde Sí, y entonces ella toma la puerta de la derecha. Es claro que este problema es equivalente al anterior: la presencia de dos guardias no hace ninguna diferencia. La pregunta de Sarah es equivalente a "¿Usted me diría que esta puerta conduce a una muerte segura?".

Una variante más complicada es la del problema siguiente:

Problema 13. En la misma situación del problema 11, supongamos que el guardia entiende el idioma español pero responde en su lengua nativa con una de las palabras *Bal* o *Da*, una de las cuales significa Sí y la otra No, pero no sabemos en qué orden. ¿Es posible, mediante una sola pregunta (que el guardia responderá con Bal o Da) deducir qué puerta conduce a la libertad?

Solución: Sí. En general se puede averiguar si una proposición p es verdadera mediante la pregunta contrafactual "Si yo le preguntase si p es verdadera, ¿usted me respondería Bal?". Para comprobarlo construimos la tabla siguiente, donde q es la proposición "El guardia es veraz", r es "Bal significa Sí", P es la pregunta "¿Es p verdadera?" y P' es "Si yo le preguntase si p es verdadera, ¿usted me respondería Bal?".

p	q	r	P	P'
V	V	V	Bal	Bal
V	V	F	Da	Bal
V	F	V	Da	Bal
V	F	F	Bal	Bal
F	V	V	Da	Da
F	V	F	Bal	Da
F	F	V	Bal	Da
F	F	F	Da	Da

Como se ve, si se obtiene la respuesta Bal entonces p es verdadera y si se obtiene la respuesta Da entonces p es falsa.

Solución alternativa: También se puede averiguar si una proposición p es verdadera mediante una pregunta que no sea contrafactual. Sean q y r como antes, y sea s la proposición $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$. Sea S la pregunta "¿Es s verdadera?".

La tabla siguiente muestra que si se obtiene la respuesta Bal entonces p es verdadera y si se obtiene la respuesta Da entonces p es falsa.

p	q	r	s	S
V	V	V	V	Bal
V	V	F	F	Bal
V	F	V	F	Bal
V	F	F	V	Bal
F	V	V	F	Da
F	V	F	V	Da
F	F	V	V	Da
F	F	F	F	Da

El siguiente problema ha sido llamado por George Boolos [2] "el acertijo lógico más difícil del mundo".

Problema 14. Tres dioses A, B y C se llaman, en algún orden, Veraz, Falaz, y Aleatorio. Veraz siempre dice la verdad, Falaz siempre miente y Aleatorio dice verdad o mentira aleatoriamente. La tarea es determinar las identidades de A, B y C efectuando tres preguntas cuya respuesta sea Sí o No. Cada pregunta debe ser formulada a un único dios. Los dioses entienden el español, pero contestarán todas las preguntas en su propio idioma, en el cual las palabras para Sí y No son 'Da' y 'Ja', en algún orden desconocido.

Solución: La idea de la solución es identificar primero un dios que no sea Aleatorio, para después aplicar las técnicas del problema 12. Sea p la proposición "A es veraz". Sea q la proposición "B es aleatorio". Sea r la proposición "Ja significa Sí". Sea s la proposición $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ y sea S la pregunta "¿Es s verdadera?". La tabla siguiente muestra las respuestas que se pueden obtener si se hace la pregunta S al dios A.

p	q	r	s	S
V	V	V	V	Ja
V	V	F	F	Ja
V	F	V	F	Da
V	F	F	V	Da
F	V	V	F	Ja
F	V	F	V	Ja
F	F	V	V	Da
F	F	F	F	Da

Como se ve, si se obtiene Ja como respuesta entonces B es aleatorio, mientras que si se obtiene Da como respuesta entonces B no es aleatorio. En el primer caso A y C deben ser, en algún orden, Veraz y Falaz. Entonces con una sola pregunta a C se puede determinar, como se vió en el problema 12, si A es Veraz o no, y esto determina la naturaleza de A y C, resolviendo el problema.

En el segundo caso B no es aleatorio, luego es Veraz o Falaz. Entonces haciendo una pregunta a B se puede determinar si B es Veraz o Falaz. Y con otra pregunta a B se determina si Aleatorio es A o C, con lo cual se pueden identificar las identidades de los tres dioses.

También se puede dar una solución algo más sencilla utilizando contrafactuales, vea [5] y [4].

4 Algunos problemas mixtos

En esta sección veremos un par de problemas de tipo olímpico, en los cuales se mezcla un problema lógico con otro combinatorio o algebraico.

Problema 15. (Olimpiada de Mayo 2018, 2do. nivel, problema 3) Los 2018 residentes de un pueblo están estrictamente divididos en dos clases: caballeros, que siempre dicen la verdad, y mentirosos, que siempre mienten. Cierto día todos los residentes se acomodaron alrededor de una circunferencia y cada uno de ellos anunció en voz alta "Mis dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, son mentirosos". A continuación uno de los residentes abandonó el pueblo. Los 2017 que quedaron se acomodaron nuevamente en una circunferencia (no necesariamente en el mismo orden que antes) y cada uno de ellos anunció en voz alta "Ninguno de mis vecinos, el de la izquierda y el de la derecha, es de mi misma clase". Determinar, si es posible, de qué clase es el residente que abandonó el pueblo, caballero o mentiroso.

Solución: En la circunferencia con 2018 personas, cada caballero está entre dos mentirosos, pero un mentiroso no puede estar entre dos mentirosos (pues en ese caso diría la verdad). Luego los caballeros están aislados, separados por bloques de uno o dos mentirosos. Esto significa que el número de caballeros k cumple que $3k \geq 2018$ y por lo tanto $k \geq 673$.

Después que se va uno, en la circunferencia con 2017 personas, cada caballero está nuevamente entre dos mentirosos. Ningún mentiroso puede estar entre dos caballeros (pues en ese caso diría la verdad). Luego los caballeros están aislados, separados por bloques de al menos dos mentirosos. Esto significa que el número de caballeros h cumple que $3h \leq 2017$ y por lo tanto $h \leq 672$. Pero h debe ser igual a k (si se fue un mentiroso) o a $k - 1$ (si se fue un caballero). La única posibilidad es $k = 673$, $h = 672$ y el que se fue era caballero.

Problema 16. (IMO 2012, Problema 3)

El *juego de la adivinanza del mentiroso* es un juego para dos jugadores A y B. Las reglas del juego dependen de dos enteros positivos k y n conocidos por ambos jugadores. Al principio del juego, el jugador A elige enteros x y N con $1 \leq x \leq N$. El jugador A mantiene x en secreto, y le dice a B el verdadero valor de N. A continuación, el jugador B intenta obtener información acerca de x formulando preguntas a A de la siguiente manera: en cada pregunta, B especifica un conjunto arbitrario S de enteros positivos (que puede ser uno de los especificados en alguna pregunta anterior), y pregunta a A si x pertenece a S. El jugador B puede hacer tantas preguntas de ese tipo como desee. Después de cada pregunta, el jugador A debe responderla inmediatamente con sí o no, pero puede mentir tantas veces como quiera. La única restricción es que entre cualesquiera $k+1$ respuestas consecutivas, al menos una debe ser verdadera. Cuando B haya formulado tantas preguntas como haya deseado, debe especificar un conjunto X de a lo sumo n enteros positivos. Si x pertenece a X entonces gana B; en caso contrario, pierde. Demostrar que:

a) Si $n \geq 2^k$, entonces B puede asegurarse la victoria.

b) Para todo k suficientemente grande, existe un entero $n \geq 1,99^k$ tal que B no puede asegurarse la victoria.

Solución: . Considere una respuesta R (Sí o No) a una pregunta del tipo "¿x pertenece a S?". Diremos que R es *inconsistente* con un número j si R es Sí y $j \notin S$ o si R es No y $j \in S$. Observe que una respuesta inconsistente con x es una mentira.

a) Supongamos que B ha determinado un conjunto T de tamaño m que contiene a x. Esto es cierto inicialmente con $m = N$ y $T = \{1, 2, \ldots, N\}$. Si $m > 2^k$ mostraremos que B puede hallar un número $y \in T$ diferente de x. Por lo tanto puede quitarle y a T reduciendo su tamaño en una unidad, y continuando de ese modo va a llegar a un T con $2^k \leq n$ elementos y gana.

Como solamente el tamaño $m > 2^k$ de T es relevante, supongamos que $T = \{0, 1, \ldots, 2^k, \ldots, m-1\}$. B comienza por preguntar repetidamente si $x \in \{2^k\}$. Si A responde que no $k+1$ veces seguidas, entonces una de esas respuestas es verdadera y $x \neq 2^k$. De lo contrario B deja de preguntar la primera vez que obtenga una respuesta afirmativa. Luego pregunta, para cada $i = 1, \ldots k$, si en la representación binaria de x hay un 0 en la posición i (numeradas desde 1 de derecha a izquierda). Más precisamente, pregunta si $x \in S_i$ donde S_i son los enteros desde 0 hasta $m-1$ que tienen un 0 en la posición i. Ahora B construye un número y poniendo en la posición binaria i un 1 si la respuesta a ¿$x \in S_i$? es afirmativa, o un 0 si la respuesta es negativa. Entonces $y \in \{0, \ldots, 2^k - 1\}$ es inconsistente con las k preguntas ¿$x \in S_i$? y también con la anterior ¿$x \in \{2^k\}$?. Como A debe haber respondido con la verdad al menos una de esas preguntas, es claro que $y \neq x$.

b) Si $1{,}99 < \lambda < 2$, se puede hallar un k suficientemente grande para que

$$n = \lfloor (2-\lambda)\lambda^{k+1} \rfloor - 1 > 1{,}99^k.$$

Entonces A puede aplicar la siguiente estrategia: primero, escoge $N = n+1$ y cualquier $x \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Luego de cada una de sus respuestas A determina, para cada $i = 1, \ldots n+1$, el número m_i de respuestas consecutivas que ha dado inconsistentes con i. Para decidir su siguiente respuesta, A considera la cantidad

$$\phi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Cualquiera sea la pregunta de B, A da la respuesta que minimiza ϕ. Con esta estrategia se puede probar que siempre será $\phi < \lambda^{k+1}$ (la prueba es técnica y la omitimos porque no se relaciona con el tema de este artículo; el lector puede tratar de probarlo como ejercicio o consultar [3], problema C6). Ahora bien, si $\phi < \lambda^{k+1}$ entonces ningún exponente m_i en ϕ excederá a k, o sea que A jamás dará mas de k respuestas consecutivas inconsistentes con algún i. En particular esto se aplica al número x, luego A nunca mentirá más de k veces consecutivas y su estrategia es válida. Y como esta estrategia no depende de x de ninguna manera, B no puede hacer ninguna deducción sobre x y por lo tanto no puede garantizar su victoria.

5 Conclusiones

Los problemas y acertijos lógicos atraen a mucha gente, y no solo a quienes tienen una inclinación natural hacia la matemática. Esto está demostrado por la popularidad de las columnas dedicadas a estos problemas en periódicos y revistas, y la de libros como los de Robert Smullyan. Por ese motivo, en el aula de clases pueden servir para atraer a la resolución de problemas a estudiantes que no tengan mucho entusiasmo por la matemática. Y además pueden motivar en algunos el estudio serio de la lógica matemática. En las competiciones matemáticas, si bien la lógica no es una de las áreas prioritarias, estos problemas aparecen sin embargo con frecuencia, solos o bien como una parte de problemas que involucran otras áreas. Por lo tanto es importante que en el entrenamiento de los participantes en competiciones se preste atención a estos problemas y a las técnicas y estrategias que se pueden usar para resolverlos.

Referencias

[1] Baltus, Ch., *A Truth Table on the Island of Truthtellers and Liars*, Mathematics Teacher, **94**(9) (2001), 730–732.

[2] Boolos, G., *The hardest logic puzzle ever*, Harvard Review of Philosophy, **66**(1996), 62–65.

[3] IMO 2012 shortlist, `https://www.imo-official.org/problems.aspx`

[4] Rabern, B., Rabern, L., *A Simple Solution to the Hardest Logic Puzzle Ever*, Analysis, **68**(2), (2008), 105–112.

[5] Roberts, T. S., *Some Thoughts About The Hardest Logic Puzzle Ever*, Journal of Philosophical Logic, **30** (2001), 609–612.

[6] Smullyan, R., *What is the name of this book?*, Prentice-Hall, 1978.

[7] Smullyan, R., *This book needs no title*, Prentice-Hall, 1980.

[8] Smullyan, R., *The lady or the tiger?*, Alfred A. Knopf, 1982.

[9] Smullyan, R., *To mock a mockingbird.*, Alfred A. Knopf, 1985.

[10] Smullyan, R., *Satan, Cantor and Infinity*, Alfred A. Knopf, 1992.

[11] Smullyan, R., *The Riddle of Scheherazade*, Alfred A. Knopf, 1997.

[12] Smullyan, R., *The Gödelian puzzle book*, Dover, 2013.

[13] Smullyan, R., *The magic garden of George B and other logic puzzles*, World Scientific, 2015.

[14] Smullyan, R., *Reflections: the magic, music, and mathematics of Raymond Smullyan*, World Scientific, 2015.

José Nieto (jhnieto@gmail.com)
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.