ISSN: 2711--1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 3 No. 1/2 (2022), pp.41--58.

Competencias o Competiciones: Análisis de las estrategias utilizadas por estudiantes del primer nivel de olimpiadas en la solución de problemas tipo PISA vs problemas tipo Canguro Matemático.

Juan Samuel Rangel-Luengas, María Falk de Losada.

Resumen

Este es un reporte parcial de una investigación que pretende acercar dos marcos referenciales diferentes: la teoría sobre las competencias por una parte y las competiciones matemáticas que centran su atención en la solución de problemas retadores por otra. Algunos países presentan su propuesta curricular en términos de competencias, mientras que la comunidad matemática científica continúa en el proceso de solucionar problemas que permitan el avance de la teoría. En los dos enfoques se centra la atención en la solución de problemas y se utilizan problemas con características diferentes. Después de aplicar dos actividades a estudiantes en entrenamiento para competiciones de grados sexto y séptimo y, realizar un análisis desde los enfoques competencias, competiciones y la teoría DNR, se concluye que el número de estrategias utilizadas es un indicador común de avance positivo para competencias y competiciones, también se obtiene que, a consideración de los participantes, el uso combinado de los dos enfoques debería implementarse en el aula regular.

Palabras y frases clave: Aprendizaje en matemáticas, educación matemática, competencia matemática, olimpiadas matemáticas, competencias

Competencies or Competitions: Analysis of the strategies used by students of the first level of olympiads in the solution of PISA type problems vs Mathematical Kangaroo type problems.

Abstract

This is a partial report of a research that aims to bring together two different referential frameworks: the theory of competencies on the one hand, and mathematical competitions that focus on the solution of challenging problems on *the other. Some countries present their curricular proposals in terms of competencies, while the scientific mathematical community continues in the process of solving problems that allows the theory to advance. Both approaches focus on problem solving and use problems with different characteristics. After applying two activities to students in training for competitions in the sixth and seventh grades, and carrying out an analysis from the competencies, competitions and DNR theory approaches, it is concluded that the number of strategies used is a common indicator of positive progress for competencies and competitions, and that, according to the participants, the combined use of the two approaches should be implemented in the regular classroom.*

Key words and phrases: *Mathematics learning, mathematics education, Mathematical competition, Mathematical Olympiads, Competencies*

1 Introducción

Este documento informa una parte relevante de la investigación titulada *"avances en la caracterización del pensamiento matemático: relaciones mutuas y contribuciones entre las competiciones en la resolución de problemas y la teoría de las competencias"*. El propósito del estudio es contrastar dos enfoques: por un lado, el enfoque de competencias, que se centra en habilidades, capacidades y el dominio de las matemáticas escolares y, por otro lado, el desarrollo del pensamiento matemático a través de competiciones matemáticas como las Olimpiadas.

La actividad se realizó con 16 estudiantes sobresalientes de matemáticas en los primeros grados de la escuela secundaria (grados sexto y séptimo) que asistían a un curso de entrenamiento vacacional para Olimpiadas matemáticas. En las siguientes secciones se presentan y analizan los resultados de dos actividades que incluye dos tipos de desafíos: preguntas tipo PISA derivadas del mismo contexto, y preguntas del Canguro y Olimpiadas matemáticas que no se derivan del mismo contexto, además, se describen los resultados de una breve encuesta de percepción sobre los dos tipos de reto.

Una de las referencias internacionales para el modelo de competencia es el Dr. Mogens Niss y sus colaboradores (2002, 2011, 2016, 2019), quienes han determinado lo que se considera internacionalmente como competencia matemática. Niss y Højgaard (2011) presentan el documento "*Competencias y Aprendizaje Matemático: Ideas e Inspiración para el Desarrollo de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas en Dinamarca",* que es la traducción al inglés del informe del grupo KOM de 2002. Para determinar la competencia matemática, el grupo KOM identifica ocho competencias centrales que conforman la competencia matemática general (ver figura 1), entrelazadas en forma de flor (Niss y Højgaard, 2011), divididas en dos grandes habilidades: primero, la habilidad para preguntar y responder de y por medio de la matemática y segundo, la habilidad de tratar con el lenguaje y las herramientas.

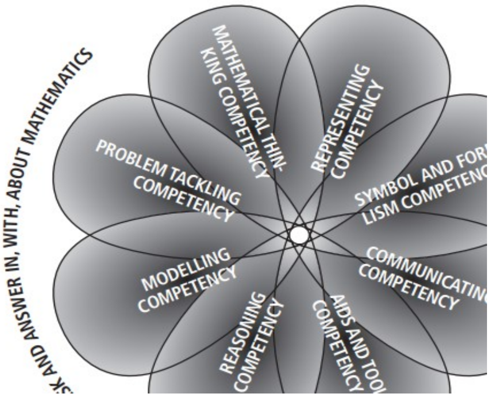


Figura 1. Flor de las ocho sub competencias de la competencia matemática (Tomado de Niss & Højgaard, 2011, p 51).

Además, proponen que estas sub-competencias están interconectadas, cada una con su propia identidad y ninguna de las competencias se puede reducir a las demás. Este modelo de competencia matemática se ha adoptado como marco para desarrollar preguntas tipo PISA (Turner, 2010), que se utilizaron en la actividad.

Como complemento, con relación a cada sub-competencia se propone que el nivel de desarrollo puede evidenciarse en relación con tres dimensiones (Figura 2): *el grado de cobertura, el radio de acción y el nivel técnico de la competencia*. El **grado de cobertura** se refiere a la capacidad de abarcar diversos aspectos que caracterizan la competencia y la cantidad de ellos que se pueden activar de manera independiente en distintas situaciones. El **radio de acción** de una competencia se refiere a la variedad de contextos, problemas y desafíos en los que una persona puede aplicar dicha competencia. Finalmente, el **nivel técnico** de una competencia se establece en base al nivel de conocimiento conceptual y habilidades técnicas de las entidades y herramientas que se pueden emplear en dicha competencia.

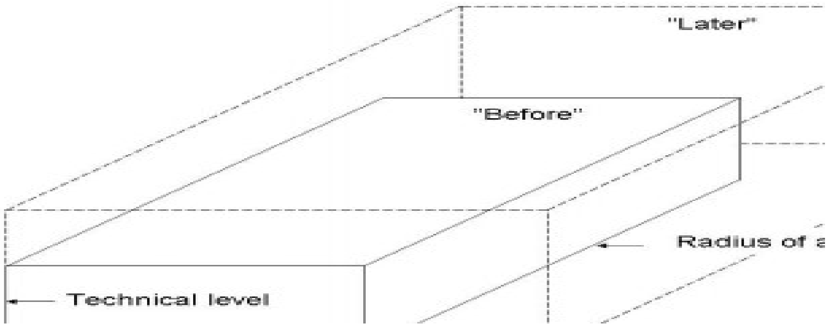


Figura 2. Nivel de competencia relativa a las tres dimensiones. (Tomado de Niss & Højgaard, 2011, P 141)

Por otro lado, Falk de Losada (2017, 2020a, 2020b, de Losada y Taylor, 2022) argumenta que la resolución de problemas es una parte fundamental de hacer matemáticas, y, siguiendo a Timothy Gowers (2000, 2008), enfatiza la naturaleza dual de hacer matemáticas, basada en dos actividades principales: la construcción de teorías y la resolución de problemas, siendo la resolución de problemas la fuerza impulsora del progreso matemático. Según Kenderov (2006, 2009, 2022), las competiciones de resolución de problemas son una buena herramienta motivacional para el trabajo independiente y el estudio en profundidad de las matemáticas por parte de los estudiantes (y a veces por parte de los profesores). La resolución de problemas ofrece la oportunidad de plantear demandas personales, manejar el estrés, lidiar con emociones negativas y aprender de los errores, mientras se forjan habilidades y carácter de por vida. Las competiciones de resolución de problemas matemáticos juegan un papel crucial en el campo de la educación matemática.

Además de ser un tema totalmente novedoso, el presente artículo se relaciona con varios temas discutidos en conferencias internacionales sobre educación matemática, como la resolución de problemas, la evaluación y la competencia, las competiciones matemáticas y las teorías de la educación matemática. Específicamente, compara el enfoque de aprendizaje desde la competencia de resolución de problemas según Niss y colaboradores versus la actividad de resolución de problemas. Para este propósito se utiliza como marco referencial la teoría de Harel (2008a, 2008b, 2021), DNR, en que una de sus premisas es la dualidad entre las formas de pensar y formas de entender en la que el estudio de las formas de entender particulares utilizadas repetidamente, permiten observar tendencias del pensamiento y, a su vez, delimitar características generales de cómo se clasifican y organizan las formas de pensar.

En este documento, se propone que un indicador de las formas de entender son las estrategias utilizadas por los estudiantes y su uso reiterado, delimita las posibles formas de pensar. Discutimos la importancia de comprender la relación entre el acto mental de solucionar problemas, las formas de comprensión o entendimiento y las formas de pensamiento por una parte y, la propuesta de preguntas abiertas y los retos matemáticos como herramientas efectivas para activar el aprendizaje robusto en el aula de matemáticas por otra.

El documento reporta los resultados de la aplicación de dos actividades realizadas con estudiantes en entrenamiento para olimpiadas. A través de este artículo, pretendemos arrojar luz sobre el papel crucial de las competiciones de resolución de problemas en la evolución de la educación matemática y el desarrollo del pensamiento matemático.

2 Método de investigación

El enfoque metodológico de la investigación es cualitativo y basado en la Educación Matemática como ciencia del diseño, conservando una dialéctica entre las preguntas de investigación y el diseño metodológico de tal forma que, cada vez que se reestructuran las preguntas de investigación, estas lo van direccionando y permiten ajustar el diseño metodológico (Lesh y Sriraman, 2010).[1]La ciencia del diseño busca generar teorías con un enfoque pragmático sobre el proceso de aprendizaje específico de un tema de interés y los medios para apoyarlo a través de un diseño intervencionista y un proceso prospectivo y reflexivo. La investigación del diseño se centra en el desarrollo de teorías sobre los

[1] Lesh, R., & Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. In Theories of mathematics education (pp. 123-146). Springer, Berlin, Heidelberg.
Sriraman, B. & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers.* Series Advances in Mathematics Education. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2. Springer Berlin, Heidelberg, p 668

procesos de aprendizaje y la investigación educativa, y busca una relación estrecha entre la teoría y el trabajo cotidiano en las aulas. Aunque se pueden utilizar materiales curriculares, el propósito es incentivar el pensamiento en los estudiantes y estimular formas de aprendizaje activas y anticipadas. Para Prediger, Gravemeijer y Confrey (2015)[2], la investigación como ciencia del diseño se está convirtiendo en una metodología cada vez más importante en la comunidad de investigación en educación matemática. Hay dos enfoques de investigación sobre el diseño, el primero, busca innovaciones en los planes de estudio y el otro, considerado más relevante, que se centra en el desarrollo de teorías sobre los procesos de aprendizaje.

El eje principal de la investigación global corresponde al segundo enfoque y como se propone por Prediger, Gravemeijer y Confrey (2015) tiene las siguientes características (1) Es un diseño intervencionista, ya que se realiza una intervención al crear y estudiar nuevas formas de instrucción. (2) El objetivo principal es generar o refinar teorías con un enfoque pragmático sobre el proceso de aprendizaje específico de un tema de interés y los medios para apoyarlo. (3) Se utiliza un proceso prospectivo y reflexivo, ya que se conecta la teoría y el experimento, generando reflexiones acerca de la relación entre lo esperado y lo observado en los procesos de enseñanza y aprendizaje. (4) Se observan ciclos iterativos de invención y revisión que permiten refinar las conjeturas y adaptar tanto las actividades de instrucción como la teoría que las sustenta. Además, los conocimientos no solo se adquieren en las distintas iteraciones sino también al realizar el análisis retrospectivo. (5) La investigación es ecológicamente válida y orientada a la práctica. Busca la relación entre la teoría y el trabajo cotidiano en las aulas que represente las condiciones de la práctica real. Así, las teorías están estrechamente vinculadas a las actividades de los estudiantes y los profesores, y permiten ponerlas a prueba y realizar revisiones de forma reiterada.

En resumen, la investigación como ciencia del diseño requiere un enfoque diferente del currículo y busca estimular el pensamiento y formas de aprendizaje activas e imprevistas. Es una metodología flexible, iterativa y convergente con los objetivos de la investigación, lo que conlleva responsabilidad y madurez en las decisiones. Aunque no puede pensarse que es una panacea (Boote, 2010)[3], sí está coherentemente pensada con la evolución y progreso histórico de la matemática, su relación con la ciencia de la computación, la revisión e innovación curricular y, lo más importante, su atención en el desarrollo de teorías sobre los procesos de aprendizaje, el cual es uno de los propósitos principales de la investigación realizada.

3 Descripción y análisis de los resultados

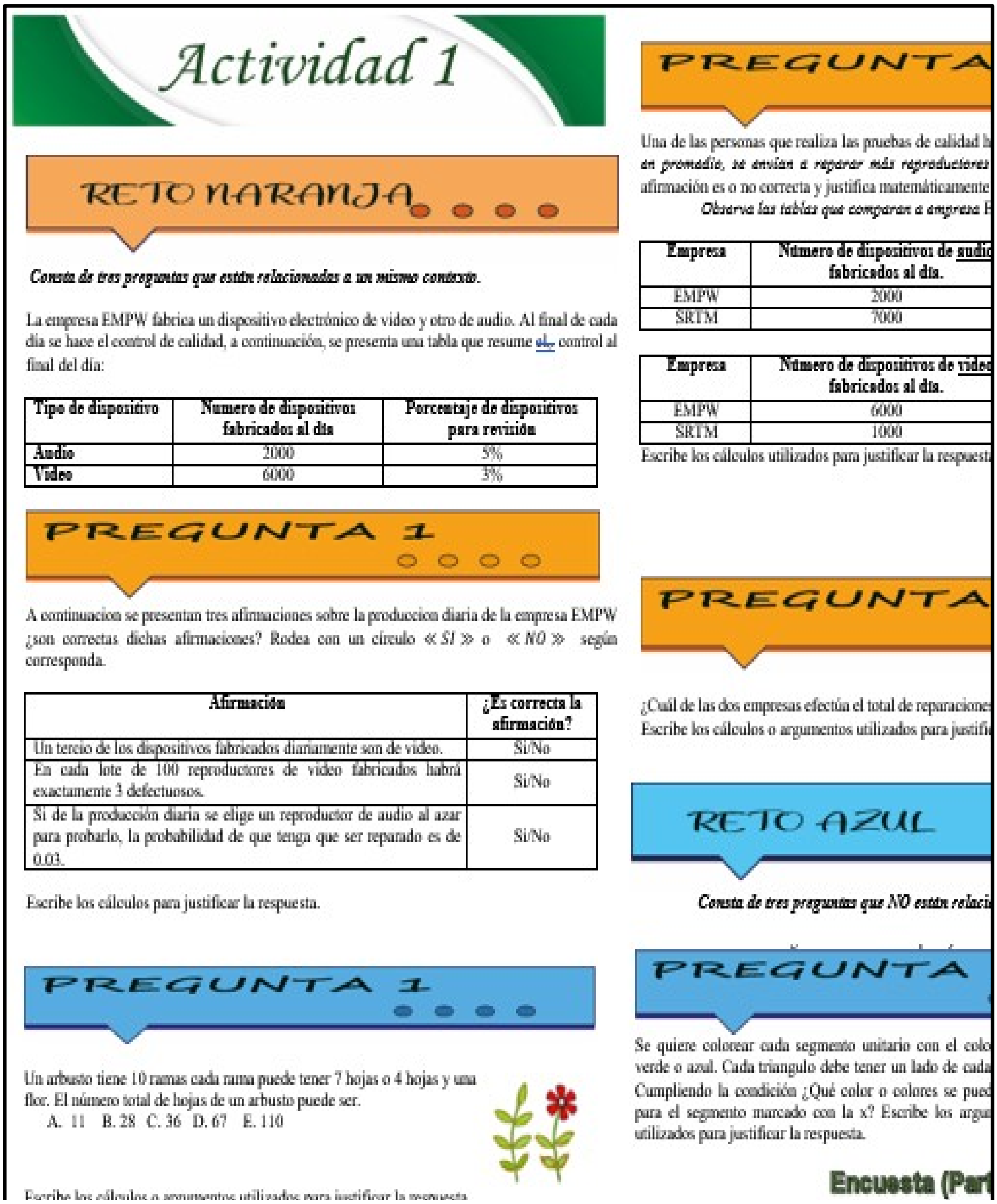
Se aplican dos actividades a estudiantes que se encuentran en entrenamiento para olimpiadas. Aunque este escenario es utópico e idealizado con relación al aula regular, porque son estudiantes que tienen muy buena formación matemática y se encuentran en el proceso de entrenamiento para someterse a pruebas de alto nivel, tal como ocurre en

[2]Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM*, *47*(6), 877-891.

[3]Boote, D. N. (2010). Commentary 3 on re-conceptualizing mathematics education as a design science. In *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 159-168). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

cualquier disciplina olímpica. Sin embargo, es un camino para observar el comportamiento de las actividades y permite tomar decisiones que mejoren la aplicación posterior con estudiantes de aula regular.

Las actividades presentan la siguiente estructura: Constan de dos retos, naranja (tipo PISA) y azul (tipo Olimpiada), cada uno con tres preguntas o problemas según el tipo de reto tal como se muestra en la Figura 3 y la Figura 4.



Actividad 1

RETO NARANJA

Consta de tres preguntas que están relacionadas a un mismo contexto.

La empresa EMPW fabrica un dispositivo electrónico de video y otro de audio. Al final de cada día se hace el control de calidad, a continuación, se presenta una tabla que resume el control al final del día:

Tipo de dispositivo	Numero de dispositivos fabricados al día	Porcentaje de dispositivos para revisión
Audio	2000	5%
Video	6000	3%

PREGUNTA 1

A continuacion se presentan tres afirmaciones sobre la produccion diaria de la empresa EMPW ¿son correctas dichas afirmaciones? Rodea con un círculo « SI » o « NO » según corresponda.

Afirmación	¿Es correcta la afirmación?
Un tercio de los dispositivos fabricados diariamente son de video.	Si/No
En cada lote de 100 reproductores de video fabricados habrá exactamente 3 defectuosos.	Si/No
Si de la producción diaria se elige un reproductor de audio al azar para probarlo, la probabilidad de que tenga que ser reparado es de 0.03.	Si/No

Escribe los cálculos para justificar la respuesta.

PREGUNTA 1

Un arbusto tiene 10 ramas cada rama puede tener 7 hojas o 4 hojas y una flor. El número total de hojas de un arbusto puede ser.

A. 11 B. 28 C. 36 D. 67 E. 110

PREGUNTA

Una de las personas que realiza las pruebas de calidad
en promedio, se envían a reparar más reproductores
afirmación es o no correcta y justifica matemáticamente
Observa las tablas que comparan a empresa

Empresa	Número de dispositivos de audio fabricados al día.
EMPW	2000
SRTM	7000

Empresa	Número de dispositivos de video fabricados al día.
EMPW	6000
SRTM	1000

Escribe los cálculos utilizados para justificar la respuesta

PREGUNTA

¿Cuál de las dos empresas efectúa el total de reparaciones
Escribe los cálculos o argumentos utilizados para justificar

RETO AZUL

Consta de tres preguntas que NO están relacionadas

PREGUNTA

Se quiere colorear cada segmento unitario con el color verde o azul. Cada triangulo debe tener un lado de cada
Cumpliendo la condición ¿Qué color o colores se puede
para el segmento marcado con la x? Escribe los argumentos
utilizados para justificar la respuesta.

Encuesta (Part

Figura 3. Actividad 1 Aplicada a estudiantes en entrenamiento.

Con un poco más de detalle, en la **Actividad 1** se encuentra un ***desafío naranja*** que exige a los estudiantes un buen dominio de los porcentajes, la regla de tres simple y las relaciones de proporcionalidad directa. Además, los estudiantes deben interpretar la información presentada en tablas para comparar los valores de producción de dos fábricas de artículos electrónicos. Mientras que el ***desafío azul*** consta de tres preguntas: la primera requiere de aritmética sencilla, pero implica la comparación de casos. La segunda pregunta implica que los estudiantes utilicen su ingenio para determinar el número total de naranjas después de un reparto en el que sobran algunas, para esto deben proponer un nuevo reparto en el que no queden restos. Y, la tercera pregunta implica la coloración de una figura que cumpla con ciertas condiciones, aunque no se especifica explícitamente si puede haber más de una solución.

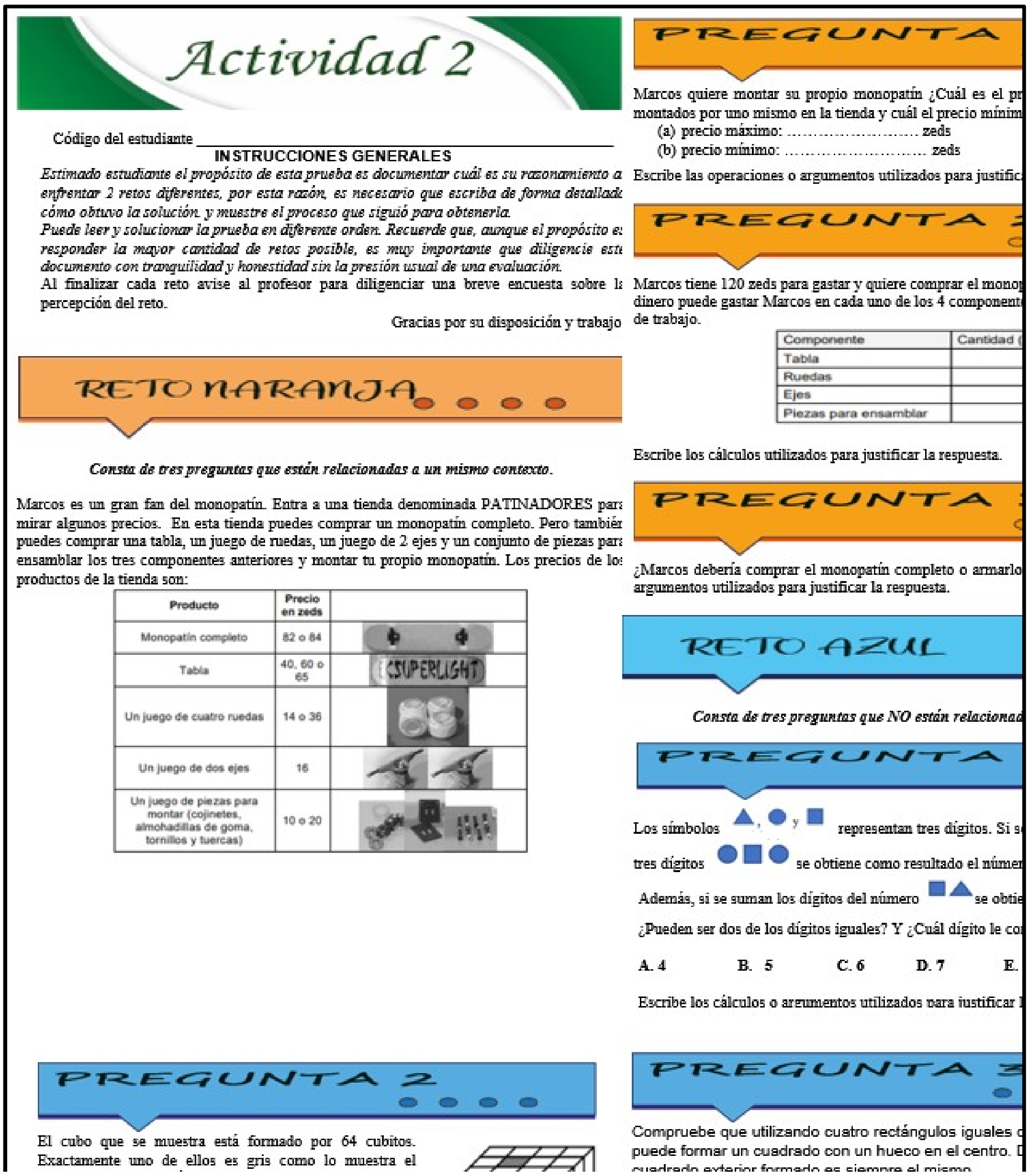


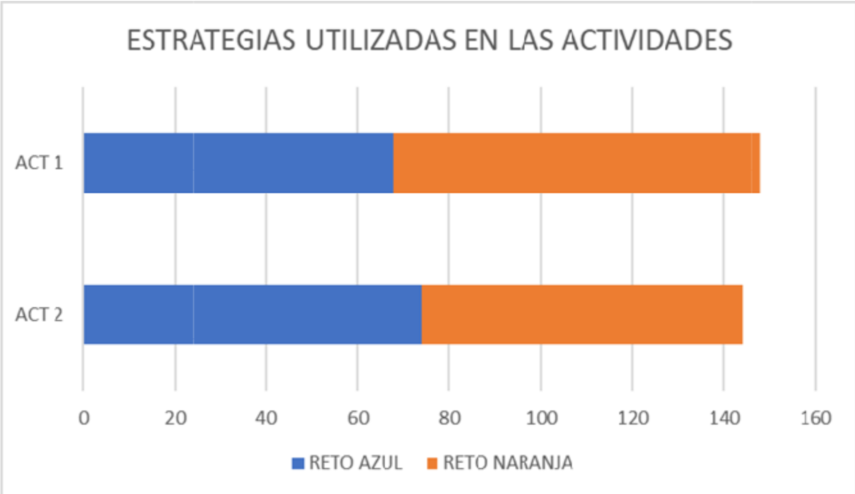
Figura 4. Actividad 2 Aplicada con estudiantes en entrenamiento.

En la **Actividad 2**, el ***desafío naranja*** consta de tres preguntas que solo requieren operaciones de sumas y restas, pero los estudiantes deben hacer comparaciones entre diferentes valores y tomar decisiones. Y en el ***desafío azul***, la primera pregunta también es numérica, requiere que los estudiantes tengan claridad sobre la propiedad modulativa y comprendan las condiciones del problema. La segunda pregunta es geométrica y se refiere a una figura en tres dimensiones, pero no requiere conocimientos especializados, solo la habilidad de visualización espacial. La tercera pregunta también es geométrica, pero su enunciado es textual y requiere que los estudiantes interpreten la información y analicen el patrón regular para determinar la solución.

3.1 Resultados de las actividades aplicadas a los estudiantes

Como ya se ha mencionado, las teorías de competencias y de competiciones son diferentes, pero puede establecerse un punto de convergencias si se centra la atención en las estrategias utilizadas por los estudiantes.

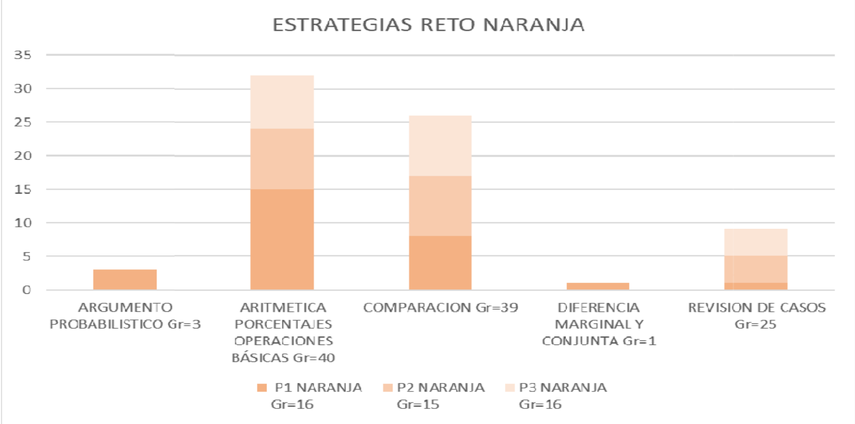
El conjunto de estrategias encontrado en las soluciones de los estudiantes en entrenamiento no es mutuamente excluyente y como base del análisis se utiliza un estudio previo que será motivo de otro artículo. Entonces, en cada uno de los retos se activan diferentes estrategias y algunas de ellas de forma recurrente (ver Gráfica 1), el propósito es observar y luego determinar las de mayor relevancia tal como se presenta en el desarrollo de esta sección.

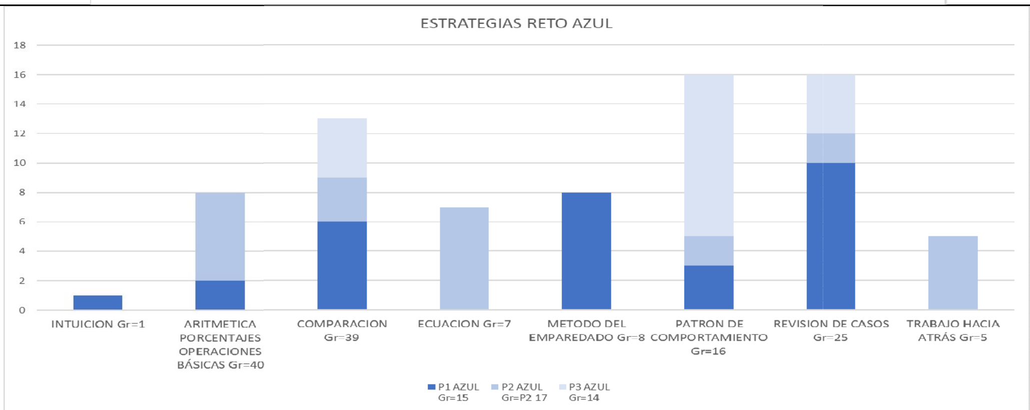


Gráfica 1. Número de veces que se utiliza alguna estrategia en los dos retos por cada actividad.

Al analizar las soluciones de la **Actividad 1**, se identifica el uso de 5 estrategias diferentes en el reto Naranja (n=71) y un conjunto de 8 estrategias en el reto Azul (n=74) como se presenta en la Tabla 1.

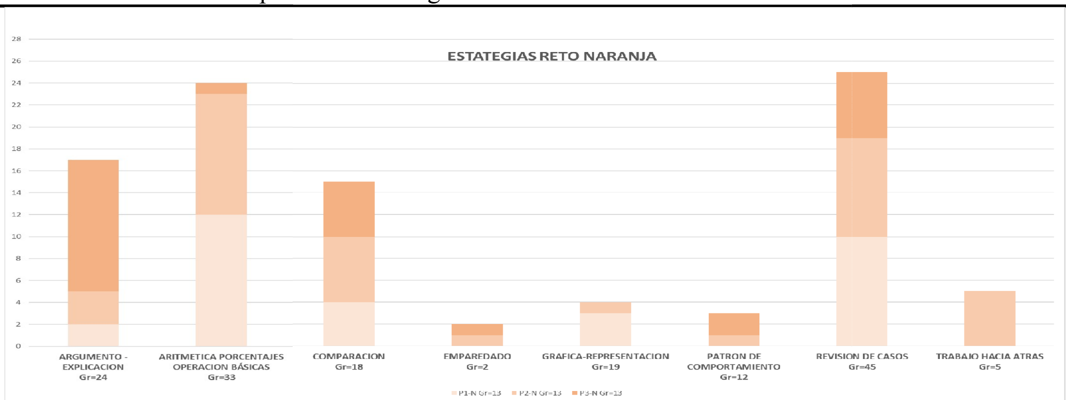
Tabla 1 Imágenes de Comparación Estrategias utilizadas en los dos retos de la Actividad 1.

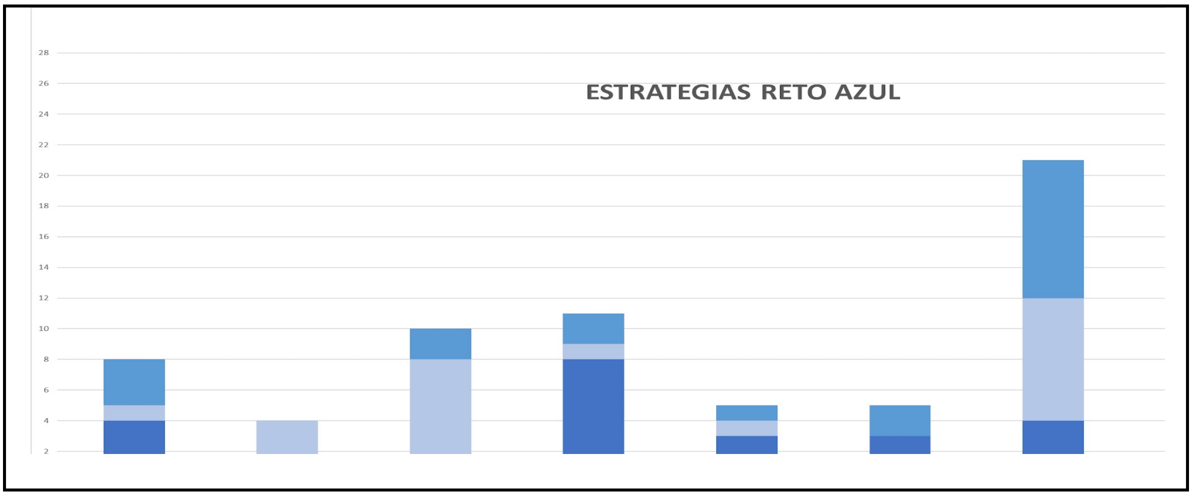




Se puede observar cómo las preguntas del reto naranja de la actividad 1 están encaminadas al uso de algunas estrategias en particular, tales como el uso de la aritmética y la comparación. Al confrontar los resultados con el reto Azul, se puede determinar que hayun desarrollo del pensamiento matemático más amplio, *medido en términos del número de estrategias utilizadas*. Pero ¿ocurre lo mismo en la actividad 2?

Tabla 2 Comparación Estrategias utilizadas en los dos retos de la Actividad 2.





Por su parte, en la Actividad 2 en el reto naranja (n=79) se activan 8 estrategias, mientras que en el reto azul (n=69) se activan 9 estrategias como lo presenta la tabla 2. El reto naranja activa de forma más recurrente algunas estrategias que el reto Azul y en el reto Azulse activa una estrategia adicional. En este caso, al parecer hay un desarrollo del pensamiento matemático similar y la diferencia entre el número de estrategias utilizadas no es tan marcada como lo fue para la actividad 1.

En cuanto a las dos actividades analizadas, se observa que el reto azul activa más estrategias relacionadas con la solución de problemas que el reto naranja. No obstante, ambos retos permiten a los estudiantes demostrar un alto dominio técnico de la teoría matemática, pero el reto azul ofrece mayores posibilidades creativas. La revisión de casos es una de las estrategias más utilizadas en los dos tipos de reto; en el reto naranja, el uso de la aritmética, la comparación y la explicación aparecen de forma frecuente, Mientras que, en el reto azul, realizar una gráfica y buscar un patrón de comportamiento están presentes.

3.2 ¿Qué se observa desde la teoría de las competencias?

Principalmente se activan las competencias que se relacionan con la *habilidad de preguntar y responder de y por medio de las matemáticas* y del conjunto de estrategias observadas, se puede atribuir que corresponden en mayor medida a alguna de las competencias de este grupo.Así el uso de diferentes estrategias es indicador de que se activa la competencia de *solución de problemas*, cuando se utiliza la matemática se activa la *modelación,* y si el estudiante se cuestiona frente a los problemas que se le presentan y elabora posibles respuestas al respecto, la competencia del *pensamiento matemático* está presente. Finalmente, cuando se elabora una justificación se avanza en el *razonamiento matemático*.

Por otra parte, puede observarse que para la Actividad 1, el **grado de cobertura** de la competencia de *solución de problemas*, medido en relación con el número de estrategias que se activan, es mayor en el reto azul que en el reto naranja, mientras que en la Actividad 2, es muy similar.

En las dos actividades el **radio de acción** se observa con relación a los diferentes dominios que se utilizan para solucionar los problemas; los retos naranjas están más enfocados al dominio de la aritmética y temas específicos de la matemática escolar, mientras que los retos azules pueden extenderse al campo de la geometría, la teoría de números y la lógica.

En las dos actividades los estudiantes pueden demostrar un alto dominio técnico de la teoría matemática, es decir, dar cuenta del **nivel técnico** de la competencia, ya sea en la intención de especializar–generalizar, en la aplicación de teoremas o propiedades o en los cambios de representación. Sin embargo, por la naturaleza de los retos de color azul, son estos los que ofrecen mayor amplitud y posibilidades creativas. En relación con la activación de la competencia matemática, se destaca que el uso de diversas estrategias está asociado con distintas competencias, como la solución de problemas, la modelación y el pensamiento matemático. Además, la elaboración de justificaciones indica un avance en el razonamiento matemático.

3.3 Estrategias relevantes en el estudio

En este análisis, se presenta que el enlace entre las teorías son las estrategias utilizadas y ellas se entienden sin ningún tipo de jerarquía. Sin embargo, ¿serán todas las estrategias consideradas igualmente relevantes? O será que ¿algunas son utilizadas por algunos estudiantes en particular? Para dar respuesta a estas preguntas se utiliza un índice que permita discriminar las estrategias con relación al uso presentado por cada uno de los estudiantes, de forma análoga a lo que se realiza con las preguntas en una evaluación desde la teoría clásica del ítem, al tener en cuenta la diferencia entre el subgrupo de estudiantes que más utilizaron las estrategias y el subgrupo de estudiantes que menos reportaron uso de estas. El consolidado de los resultados (discriminante) se puede observar en la tabla 3.

Tabla 3. Proporción de uso y discriminante

Estrategia	Discriminante	Proporción de uso
Usar aritmética porcentajes operaciones básicas	0,398	1,000
Revisar casos con criterio	0,994	0,947
Comparar	0,398	0,763
Buscar un patrón de comportamiento	0,278	0,382
Escribir un Argumento - Explicación	0,517	0,329
Graficar o usar representaciones de apoyo	0,398	0,289
Utilizar Ecuación – pre álgebra	0,040	0,171
Realizar el “Emparedado”	0,000	0,132
Trabajar hacia atrás	0,080	0,132
Visualizar	0,119	0,066
Emplear la Intuición	-0,040	0,039
Utilizar la probabilidad	0,040	0,039
Utilizar la diferencia marginal y parcial conjunta	0,040	0,013

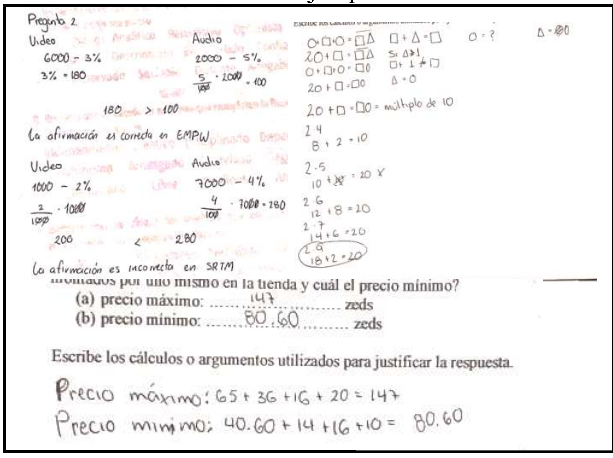
En la Tabla 3 se presenta el conjunto de estrategias organizado de forma descendente según la proporción de uso que los estudiantes dieron a cada una y se resaltan aquellas estrategias que tiene un índice de discriminación superior al 0.39. Este análisis es importante porque permite limpiar el conjunto de estrategias inicial y prestar atención a un conjunto distinguido de estrategias que pueden ser presentadas con mayor detalle.

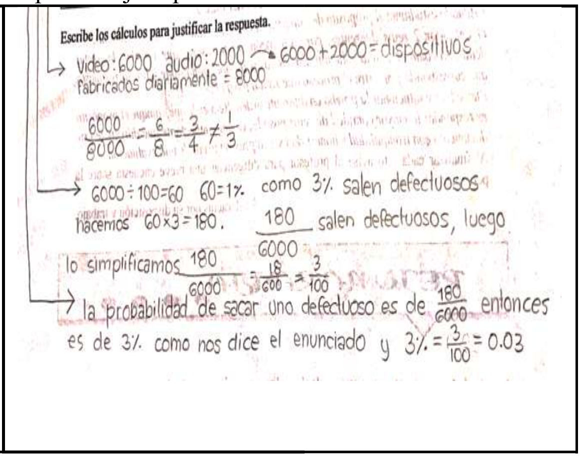
Entonces el conjunto de estrategias relevantes utilizadas por los estudiantes es: *utilizar la aritmética porcentajes u operaciones básicas, revisar casos, comparar, buscar un patrón de comportamiento, escribir un argumento – explicación, graficar o usar representaciones de apoyo*. A continuación, se presenta una breve descripción de las estrategias representativas.

I. Usar aritmética porcentajes operaciones básicas

La estrategia más utilizada por los estudiantes para dar solución a las actividades 1 y 2 es el uso de operaciones aritméticas, el cálculo de porcentajes, sumas, restas, entre otras como se muestra en la Tabla 4.

Tabla 4 Ejemplos del uso de la aritmética porcentajes operaciones básicas



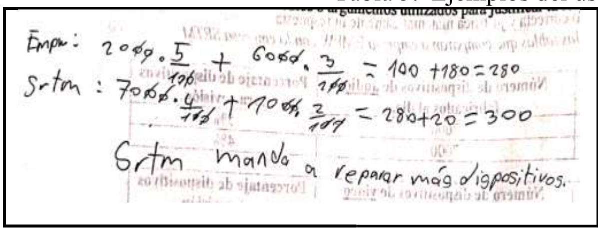


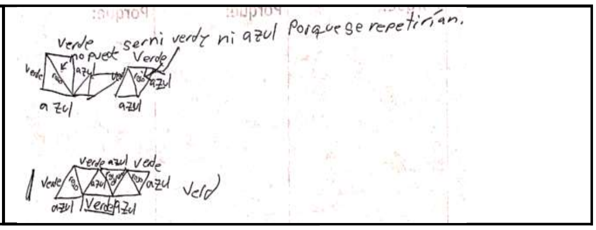
Particularmente, los retos naranjas están muy enfocados hacia el uso de operaciones aritméticas. En los retos azules el trabajo aritmético es importante en algunos de los problemas, aunque como un apoyo intermedio para solucionarlos.

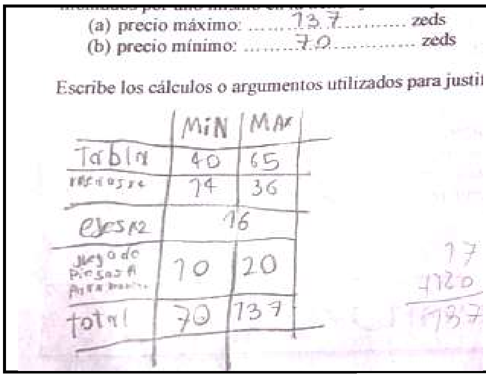
II. Revisar casos

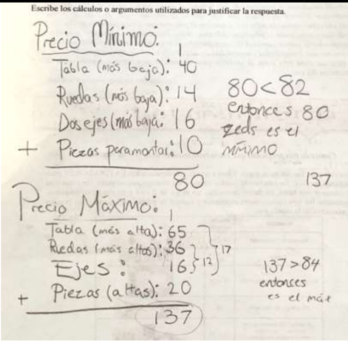
Una de las estrategias más potentes es la revisión de casos utilizada con gran frecuencia en los dos tipos de retos. No es una revisión aleatoria, por el contrario, es realizada con criterio, y atendiendo a las condiciones del problema. Los estudiantes utilizan la revisión de casos para entender o para avanzar en alguna hipótesis que ellos tienen sobre la solución o condiciones de los problemas, y en algunos casos, es un paso intermedio cuando se quiere establecer un patrón de comportamiento.

Tabla 5. Ejemplos del uso de la revisión de casos





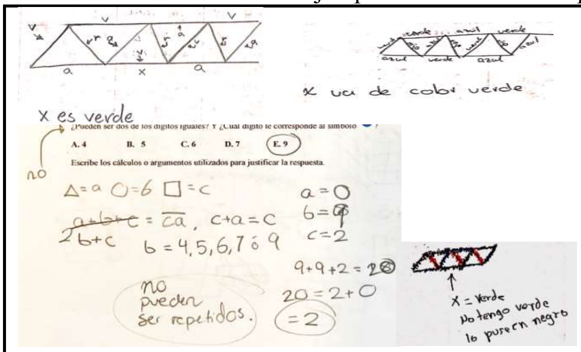


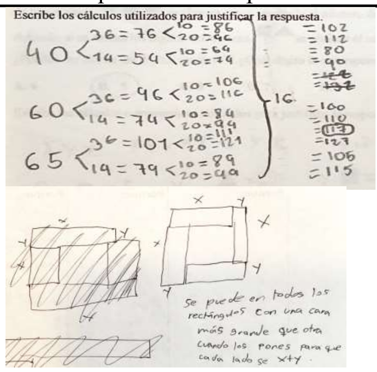


III. Buscar un patrón de comportamiento

Esta estrategia requiere cierto nivel de entrenamiento, es decir no todos los estudiantes logran observar el patrón de comportamiento y es muy importante, porque de esta manera, partiendo de las condiciones del problema, se puede avanzar firmemente hacia la generalización de las propiedades lo que aporta tanto a la solución, como a la justificación de esta.

Tabla 6. Ejemplos de uso de la búsqueda de un patrón de comportamiento

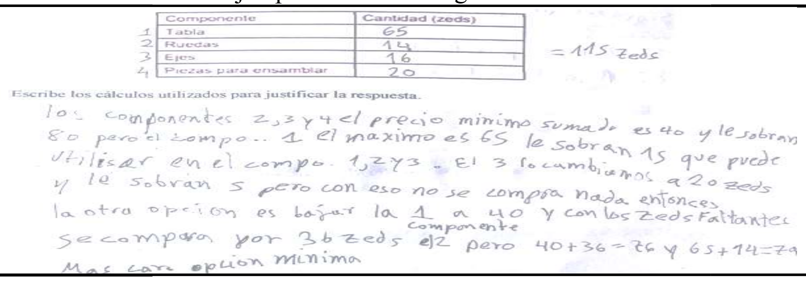


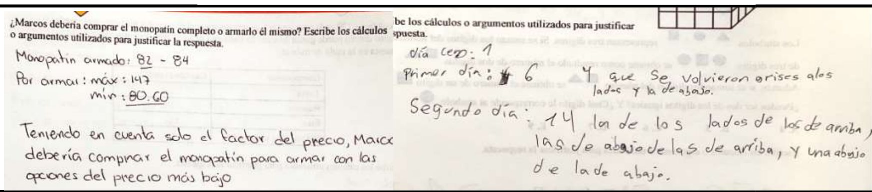


IV. Escribir un Argumento-Explicación

Esta estrategia llamada Argumento- explicación hace referencia aaquellos estudiantes que escriben o comunican los argumentos que complementan su solución. No es una estrategia de trabajo frecuente, porque muchos estudiantes consideran que basta con exhibir la solución y todo está explicado. Esta estrategia le permite al estudiante hacer un recuento de su solución, es decir, realiza la mirada atrás que le permite revaluar sus decisiones y reconectar el proceso de solución.

Tabla 7. Ejemplo del uso del argumento adicional

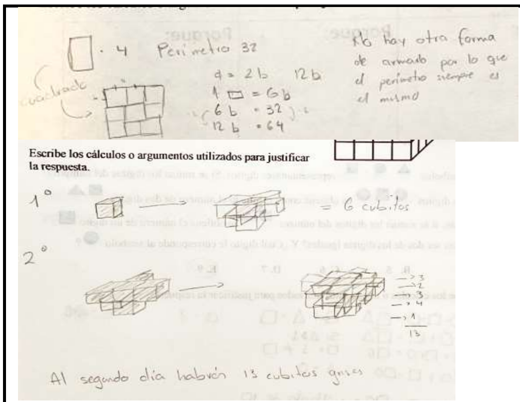


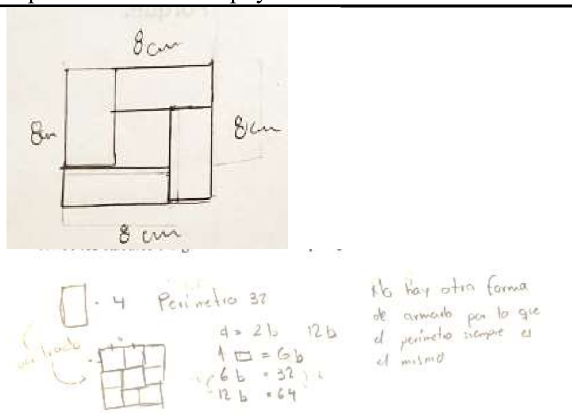


V. Graficar o usar representaciones de apoyo

Realizar una gráfica de apoyo es una de las estrategias que los estudiantes utilizan frecuentemente; sin embargo, por las condiciones de los problemas, fue utilizada en mayor medida en el reto azul. Esta estrategia está relacionada a la visualización y los cambios de representación, usadas como apoyo en el proceso de solución de los problemas.

Tabla 8. Graficar o usar representaciones de apoyo

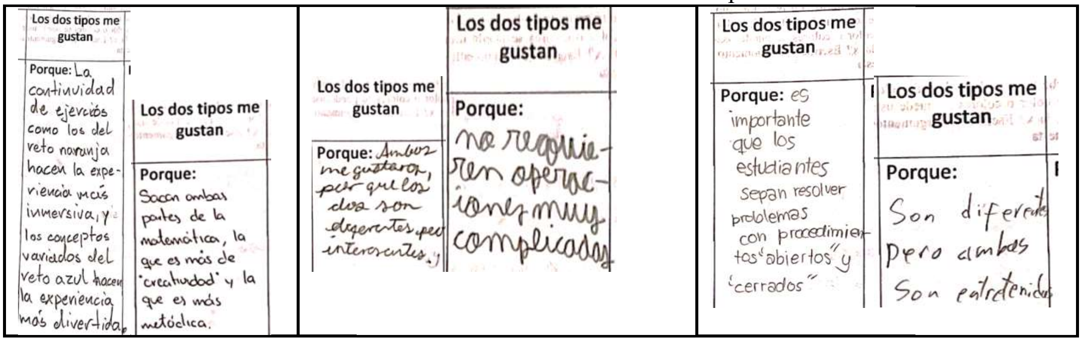




Por último, la estrategia de *Revisar casos* permite discriminar muy bien a los participantes (D=0,994), sin embargo, como es muy utilizada (P=0,947), no es un buen criterio para clasificar a los estudiantes que se consideran con mayor desarrollo del pensamiento matemático. Por su parte, Escribir un *Argumento Adicional* tiene un buen índice de discriminación (D=0.517) y su uso no es tan frecuente (P=0.329); lo mismo ocurre con la estrategia *Graficar o usar representaciones de apoyo* que tiene un índice de discriminación aceptable (D=0,398) y su proporción de uso es baja (P=0,289). Estas dos estrategias son utilizadas por una menor proporción de estudiantes, de quienes se puede suponer que presentan un mayor desarrollo del pensamiento matemático al disponer de estrategias que sus compañeros no utilizan.

Por otra parte, y no con referencia a las actividades, sino a la percepción de los estudiantes sobre los dos tipos de reto. Luego de preguntarles sobre la preferencia entre los dos tipos de reto (tabla 10) se obtuvo que hay preferencia por los retos azules valorando la posibilidad de actividades creativas, amigables y divertidas. En contraste con los retos naranjas que se consideran importantes y útiles, pero se perciben como cerrados, repetitivos y muy metódicos.

Tabla 9. Preferencia frente a los dos tipos de retos



4 Conclusiones

Se activan 13 estrategias en la aplicación de las actividades con estudiantes en entrenamiento para olimpiadas. El grupo de estrategias: *Usar aritmética, porcentajes y operaciones básicas, Comparar, Revisar casos, Graficar o usar representación de apoyo, Argumentar-explicar, Visualizar, Buscar un patrón de comportamiento, Trabajar hacia atrás, Intuir la solución, Acotar "emparedado" y Escribir una ecuación - pre álgebra*, no es un conjunto con elementos mutuamente excluyentes, pero permitió realizar comparaciones interesantes entre los estudiantes y los tipos de retos que se les propusieron.

Al usar como referente el número de estrategias se logró identificar avances en el desarrollo del pensamiento matemático y avances en el radio de acción, el grado de cobertura y el nivel técnico de la competencia de solución de problemas y tal como lo había propuesto el grupo KOM, al activarse la competencia de solución de problemas, las competencias de modelación, razonamiento y pensamiento, también se activan.

Una conclusión importante es que un aumento en el número de estrategias que se activan es un indicador de mejora para las dos teorías. Primero, desde la definición de competencias, la habilidad de solución de problemas es activada al asumir que el mayor uso de estrategias que determina un avance en el grado de cobertura de la competencia. Y segundo, desde las competiciones, el centro es la actividad de solucionar problemas y tener la posibilidad de activar un mayor número de estrategias es un indicador de que hay un avance significativo del desarrollo del pensamiento matemático.

Porque, según Harel (2021), un estudiante en la solución de un problema activa sus formas de entender, que en esta investigación son las estrategias y el uso reiterado es un indicador de las formas de pensar. Pero además de eso, se pudo establecer que hay unas estrategias que se utilizan solo por estudiantes que tienen un mayor repertorio de ellas, y se puede decir que son estudiantes que tienen un mayor desarrollo del pensamiento matemático. Por ejemplo, se observa que la estrategia *Usar aritmética, porcentajes y operaciones básicas* se usa en gran proporción, los estudiantes utilizan porcentajes, sumas, restas multiplicaciones, y en general, conocimientos asociados al currículo escolar, pero no ocurre lo mismo con la estrategia *Argumentar-explicar* que es utilizada por una menor parte de los estudiantes, entonces puede proponerse que los estudiantes que utilizaron esta última estrategia muestran una mejora en el desarrollo del pensamiento matemático comparados con aquellos que no la usaron.

¿Qué puede decirse con relación a los dos tipos de reto?

Los retos tipo PISA están más relacionados con el uso de la aritmética y la matemática escolar, mientras que los problemas del tipo olimpiadas, al no limitarse al currículo abarcan un conjunto mayor de contextos y ofrece mayores posibilidades a los estudiantes.

Los dos tipos de reto muestran su potencial y su uso combinado es recomendado. Aparentemente la solución de problemas de tipo PISA y del tipo olimpiadas ocasiona que los estudiantes utilicen las mismas estrategias, pero al revisar con detenimiento se observa una dependencia entre el tipo de problema y las estrategias que se utilizan, porque, tanto el número de estrategias como las frecuencias de uso cambian según el tipo de reto que se pretende solucionar y, al menos en esta muestra, es notable el incremento con los problemas tipo olimpiadas.

Finalmente, los dos tipos de retos son importantes para los estudiantes quienes manifiestan que les gustan y los definen como dos componentes de la matemática escolar. Describen preferencia por los retos azules (olimpiadas) valorando la posibilidad de realizar actividades creativas, amigables y divertidas. En contraste con los retos naranjas (Competencias) que se consideran importantes y útiles, pero se perciben como cerrados, repetitivos y muy metódicos. Así, se puede observar cómo los estudiantes se sienten más creativos al realizar retos del tipo olimpiada, porque valoran el hecho de poder pensar libremente y exponer sus ideas, pero no le restan importancia a los retos tipo PISA que consideran de carácter más limitado y especializado.

Referencias

Boote, D. N. (2010). Commentary 3 on re-conceptualizing mathematics education as a design science. In *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers* (pp. 159-168). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

de Losada, M. F. (2017). Are Mathematics Competitions Changing the Mathematics that Is Being Done and the Way Mathematics Is Done?. In Competitions for Young Mathematicians (pp. 329-350). Springer, Cham.

de Losada, M. F. (2020a). The Impact of Mathematical Olympiads on the Mathematics Community of Colombia. Engaging Young Students in Mathematics through Competitions—WorldPerspectives and Practices: Volume II: Mathematics Competitions and how they relate to Research, Teaching and Motivation, 139–159. World Scientific.

de Losada, M. F. (2020b). La motivación y el pensamiento detrás de cada uno de los problemas creados y seleccionados para las olimpiadas matemáticas. Espacio Matemático Vol. 1 No. 1 (2020), pp. 1-18. ISSN: 2711-1792 (En línea)

de Losada, M. F., Taylor, P. J. (2022). Perspectivas sobre las competencias matemáticas y su relación con la educación matemática. Educación matemática ZDM 54, 941–959.

https://doi.org/10.1007/s11858-022-01404-z

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. *Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy*, 265-290.

Harel, G. (2008a). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: With reference to teacher's knowledge base. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(5), 893–907. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0146-4

Harel, G. (2008b). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: Focus on proving. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 487–500. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0104-1

Harel, G. (2021). The learning and teaching of multivariable calculus: a DNR perspective. *ZDM–Mathematics Education*, *53*, 709-721.

Kenderov, P. S. (2006, August). Competitions and mathematics education. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (Vol. 3, pp. 1583-1598). Madrid: IMU..

Kenderov, P. et al. (2009). Desafíos más allá del salón de clases: fuentes y problemas organizacionales. En: Taylor, P., Barbeau, E. (eds) Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. Nueva serie de estudios ICMI, vol 12. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-09603-2_3. p 86 87.

Kenderov, PS (2022). Concursos de matemáticas: una parte integral del proceso educativo. *Educación matemática ZDM* **54**, 983–996 https://doi.org/10.1007/s11858-022-01348-4

Lesh, R., & Sriraman, B. (2010). Re-conceptualizing mathematics education as a design science. In Theories of mathematics education (pp. 123-146). Springer, Berlin, Heidelberg.

Nieto-Said, J. H., Sánchez-Lamoneda, R. Un currículo para competencias matemáticas. *Educación matemática ZDM* **54** , 1043–1057 (2022). https://doi.org/10.1007/s11858-022-01389-9

Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the Learning of Mathematics: the Danish Kom Project. *Proceedings of the 3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 115-124.

Niss, M. (2015). Mathematical Competencies and PISA. In Assessing Mathematical Literacy (pp. 35–55). *Springer International Publishing*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10121-7_2

Niss, M. (febrero, 2022). Relationships Between modelling competency and the other mathematical competencies*. Conferencia plenaria presentada en el MEM 2022*, Bogotá, Colombia.

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning: Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. English edition, October 2011, 485, 214.

Niss, M., & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM – Mathematics Education*, 48(5), 611–632. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3.

OCDE, (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: matemáticas, lectura y ciencias*.

Prediger, S., Gravemeijer, K., & Confrey, J. (2015). Design research with a focus on learning processes: An overview on achievements and challenges. *ZDM*, *47*(6), 877-891

Turner, R. (2010). Exploring mathematical competencies. *Research Developments*, *24*(24), 5.

Sriraman, B. & English, L. (2010). *Theories of Mathematics Education. Seeking New Frontiers*. Series Advances in Mathematics Education. DOI https://doi.org/10.1007/978-3-642-00742-2. Springer Berlin, Heidelberg

Juan Samuel Rangel-Luengas (jrangel97@uan.edu.co)
Secretaría de Educación de Bogotá
Bogotá Colombia

María Falk de Losada
Universidad Antonio Nariño
Olimpiadas Colombianas de Matemáticas
Bogotá Colombia