ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 3 No. 1/2 (2022), pp. 59–62

Problemas y Soluciones

José Nieto, Jorge Tipe (eds.)

El objetivo de esta sección es presentar problemas matemáticos interesantes y sus soluciones. Invitamos a los lectores a proponer problemas que puedan ser abordados por estudiantes de la escuela media o de los dos primeros años de universidad sin conocimientos especializados. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse a los editores por correo electrónico, en español, portugués o inglés. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada. Problemas abiertos conocidos no son aceptables.

Problems and Solutions

The goal of this section is to present interesting mathematical problems and its solutions. We invite the readers to propose problems which may be tackled by high school or college students without specialized knowledge. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editors in English, Spanish or Portuguese. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely. Known open problems are not suitable.

1 Problemas propuestos

Recordamos que se siguen recibiendo soluciones a los problemas 3, 5, 7, 8 y 17–27 publicados en números anteriores.

28. Dos hermanas son gemelas idénticas, pero una de ellas siempre dice la verdad y la otra siempre miente. Luis se casa con una de ellas, pero no sabe si es la veraz o la mentirosa, Un día se encuentra con una de las hermanas y no es capaz de distinguir, a simple vista, si es o no su esposa. ¿Hay alguna pregunta que le pueda hacer, cuya respuesta sea Sí o No, que le permita determinarlo?

29. En una reunión hay 100 personas numeradas desde 1 hasta 100, cada una de las cuales es veraz y siempre dice la verdad, o es mentirosa y siempre miente. Para k desde 1 hasta 100, la persona k dice "En esta reunión hay al menos k mentirosos". ¿Cuántos mentirosos hay en la reunión?

    %

30. Cada habitante de una isla es o bien *veraz* (y siempre dice la verdad) o bien *mentiroso* (y siempre miente). Un día un lógico llega a un hotel de la isla y observa que hay tres computadoras para uso de los huéspedes. Entonces se acerca a tres empleados del hotel, nativos de la isla, y le pregunta al primero de ellos si las computadoras tienen conexión a internet. La respuesta es “La computadora 1 no tiene conexión, pero pregúntele a mi compañero que él es veraz”. El segundo empleado dice entonces “La computadora 2 tiene conexión y la 3 no tiene”. Y el tercer empleado dice “Si el computador 2 tiene conexión entonces .el 1 también la tiene. El computador 3 no tiene conexión”. ¿Qué computador tiene conexión a internet?

2 Soluciones

1. [**1**(1) (2020) p. 72.] Eduardo hizo un cubo grande uniendo cierto número de cubitos idénticos y luego pintó alguna caras del cubo grande. Su hermana Nora tiró el cubo al piso y éste se desarmó en los cubitos originales. Cuarenta y cinco de estos cubitos no tenían ninguna cara pintada. ¿Cuántas caras del cubo grande había pintado Eduardo?

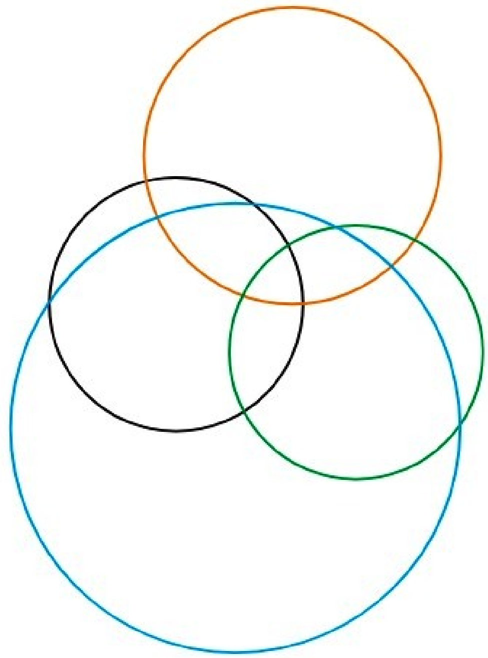
   Solución de Martin Andonegui Zabala, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela

   El cubo grande tiene 5 cubitos de lado y Juan pintó las 4 caras “laterales”. La cara del “frente"presenta 25 cubitos pintados; las dos contiguas aportan 20 nuevos cubitos pintados cada una; y la cara de atrás, 15 más. En total, 80 cubitos pintados en al menos una cara. Y como el cubo grande tiene 125 cubitos, quedan 45 limpios de pintura. La respuesta es única. Con más de 5 cubitos de lado los cubitos interiores serían al menos $4^3 = 64 > 45$. Y con 4 cubitos de lado los cubitos pintados deberían ser $64 - 45 = 19$, lo cual es imposible pues al pintar una cara se pintan 16 cubitos y si se pinta otra son 12 o 16 más.

2. [**1**(1) (2020) p. 72.] Una circunferencia divide al plano en dos regiones. Dos circunferencias secantes lo dividen en 4 regiones. ¿En a lo más cuántas regiones queda dividido el plano por 100 circunferencias secantes dos a dos?

   Solución de Angélica María Martínez, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela

   Sea R_n el número de regiones determinadas por n circunferencias. Entonces $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $R_3 = 8$, $R_4 = 14$ (ver figura).



Observamos que con la segunda circunferencia se agregan 2 regiones, con la tercera 4 regiones, con la cuarta 6 regiones, etc. Al trazar la n-sima circunferencia ésta corta a las $n-1$ anteriores en $2(n-1)$ puntos y queda dividida en igual número de arcos. Cada uno de esos arcos divide una región preexistente en dos, por lo cual el número de regiones se incrementa en $2(n-1)$. Así, sumando una progresión aritmética se tiene

$$\begin{aligned} R_n &= 2 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + 2(n-1) = 2 + 2(1 + 2 + \cdots + (n-1) \\ &= 2 + 2\frac{n(n-1)}{2} = 2 + n(n-1). \end{aligned}$$

Para $n = 100$ resulta $R_{100} = 2 + 100 \cdot 99 = 9902$.

4. [**1**(1) (2020) p. 73.] Sean a; b; c; d enteros positivos tales que $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Pruebe que $a + b + c + d$ es compuesto.

   Solución de José Nieto, Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela De las condiciones por diferencias de cuadrados se tiene

$$(a + b + c + d)(a + b - c - d) = (a + b)^2 - (c + d)^2 = ab - cd$$

y

$$(a - b + c - d)(a - b - c + d) = (a - b)^2 - (c - d)^2 = -3ab + 3cd,$$

luego

$$(a-b+c-d)(a-b-c+d) = -3(a+b+c+d)(a+b-c-d).$$

Si ambos miembros son 0, entonces $a+b=c+d$ y $a+b+c+d=2(a+b)$ es compuesto. Si no, si $a+b+c+d$ fuese primo entonces dividiría a $a-b+c-d$ o a $a-b-c+d$, que son en valor absoluto menores que $a+b+c+d$.

José Nieto jhnieto@gmail.com
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Jorge Tipe jorgetipe@gmail.com
Pontificia Universidad Católica del Perú.