ISSN: 2711--1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 4 No. 1/2 (2023), pp. 5-25.

Fracciones continuas
Una aproximación didáctica desde el bachillerato

Javier M. Zariñán, Roberto Albino y Miguel A. Rivera

Resumen

Este artículo es una propuesta didáctica para la enseñanza y difusión de las fracciones continuas en el nivel medio superior, una herramienta importante que permite un mejor análisis de las propiedades intrínsecas de los números reales. Se presentan métodos algebraicos, geométricos y diagramáticos (árbol de Farey) para obtener la fracción continua de un número racional, así como sus fracciones convergentes para su aproximación, ambas con la mayor exactitud posible. Así mismo, se mostrarán algunas propiedades básicas de esta representación.

Palabras y frases clave: fracciones continuas, recursividad, proporción aúrea, algoritmo de Euclides, máximo común divisor, árbol de Farey, fracción mediante.

Continued fractions

A didactic approach the high school level

Abstract

This article is a didactic proposal for a better and extensive teaching of continued fractions at high school level; an important tool that allows a greater analysis of the properties of real numbers. Algebraic, geometric and diagrammatic (Farey tree) methods are presented to obtain the continued fraction of a rational number, as well as its convergent fractions for its approximation, both with the best possible accuracy. Also, some basic properties of this representation will be shown.

Key words and phrases: continued fractions, recursivity, golden ratio, Euclid's algorithm, greatest common divisor, Farey's tree, mediant fraction.

No hay rama de la matemática, por abstracta que sea,
que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real
Lobachevski.

1. Introducción

En las escuelas de nivel medio superior se imparte la materia de cálculo diferencial e integral en donde, por primera vez, se estudia el concepto de sucesión de números y su convergencia o no convergencia hacia un número dado o hacia el infinito. Después, se pasa al concepto de límite de una función y se estudia cómo el proceso al límite permite determinar cuál es el valor numérico del límite de la función (si existe) cuando su variable independiente se aproxima a un número real predefinido.

Sin embargo, la palabra "aproximar" es poco entendida, analizada y estudiada, permitiendo asignarle diversos significados, incluidos los no matemáticos. El tema de las fracciones continuas tiene un especial encanto al explicar y, en cierta forma definir, qué se entiende por aproximación de un número a otro, o qué tan próximo (o cercano) están dos números reales y, en los problemas más prácticos encontrar o calcular un número de la misma naturaleza, más simple y suficientemente próximo a un número específico.

Quizás la aproximación más famosa en los inicios de la matemática griega fue la que encontró el gran físico matemático Arquímedes (287 A.C.), quien calculó, considerando el área de polígonos inscritos y circunscritos al círculo, la siguiente acotación para π:

$$3+\frac{10}{71} < \pi < 3+\frac{1}{7}$$

Como el concepto de aproximación en matemáticas es muy general, aquí nos ocuparemos de la aproximación y uso de números reales.

En este sentido nos interesa la situación de un número real $\boldsymbol{r}$ en el intervalo de números consecutivos $[n-1, n]$, y de todas las fracciones p/q en dicho intervalo que estén lo más próximas al número $\boldsymbol{r}$. Para ello, y para apreciar la complejidad de dicha fracción, el tema de la proximidad recae más en los denominadores que en sus numeradores, refrendando la importancia de la naturaleza aritmética de una fracción más que en su propia magnitud.

La representación matemática de la proximidad de la fracción *p/q* respecto al número *r*es el valor absoluto de su diferencia:

$$\left|r - \frac{p}{q}\right|$$

Con lo anterior se puede formular el concepto de aproximación a un número real como sigue (Beskin, 1987): “Dar la expresión aproximada de un número real *r* en forma de una fracción con denominador *q* significa hallar entre todas las fracciones con el denominador *q* la más próxima al número *r*” (p.11).

En la antigua Grecia el matemático Euclides (330 A.C.) desarrolló un compendio de la matemática de su tiempo en los libros los *Elementos,* donde se aprecia un procedimiento particular que hasta hoy se sigue usando en la enseñanza de la matemática, llamado el “algoritmo de la división de Euclides”, algoritmo que permite determinar el máximo común divisor de dos números naturales por medio de divisiones sucesivas. Este procedimiento, se piensa, lo utilizó Euclides para encontrar las fracciones lo más equivalentes posibles a los números reales, pero no hay evidencia de que utilizara fracciones continuas como tales (Jones & Trhon, 1984).

Euclides no conocía los números decimales, sin embargo, hoy día la representación decimal de los números reales tiene la desventaja de utilizar un número grande de dígitos, en especial para los números irracionales (decimales infinitos no periódicos). En este sentido, las fracciones continuas permiten calcular una representación fraccionaria “equivalente” de los números reales, elegante, manejable y principalmente precisa (Vargas & Pérez, 2014)

Se describe un procedimiento sencillo y rápido de aplicar utilizando los llamados *diagramas de Farey* para obtener la fracción continua equivalente a un número real con la mejor aproximación posible.

En forma paralela se explicará cómo se puede obtener la fracción continua del número $\sqrt{2}$ por medios puramente geométricos.

Lo anterior nos permite tener más elementos de análisis y de cálculo para entender y analizar mejor el significado y la importancia del estudio de las fracciones continuas en cualquier carrera técnica o profesional.

2. Referente histórico de las fracciones continuas

Los conceptos matemáticos que actualmente utilizamos provienen de un proceso lento en el tiempo creado por personajes que poco a poco le van dan forma y estructura a una idea. En ese sentido se encuentra una "primera" referencia al uso de las fracciones continuas en las obras del matemático indio Aryabhata (476-550 DC), donde se muestran los primeros intentos para solucionar una ecuación lineal indeterminada de la forma $ax + by = c$, con a, b y c enteros conocidos, llamada ecuación Diofántica, debida a Diofanto de Alejandría (s. III) (Olds, 1963).

Brahmagupta (598-668), otro matemático indio, escribió *Brahmasphutasiddhanta*, una obra que incluía avances en álgebra y aritmética. En sus estudios continúa con el trabajo de Aryabhata profundizando en la resolución de ecuaciones diofánticas enteras con métodos más sistemáticos, utilizando las fracciones continuas (Majumdar, 1981).

En su libro *Liber Abaci*, Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci (1170-1240), aborda el tema de la resolución de fracciones por medio de fracciones unitarias (Burton, 1980), donde se introduce una clase especial de fracciones denominadas "fracciones continuas". Fibonacci inicialmente las escribe como:

$$\frac{1+\frac{1+\frac{1}{5}}{4}}{3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$$

Actualmente se reconoce que la teoría moderna de las fracciones continuas comenzó con los escritos de Rafael Bombelli (1526-1572), nativo de Bolonia, Italia, quien muestra en su tratado de álgebra un capítulo sobre las raíces cuadradas representadas por fracciones continuas.

Posteriormente, las fracciones continuas fueron investigadas por el matemático-Prietro Cataldi (1548-1626), nacido en Bolonia, Italia, donde su principal interés y estudio eran los números perfectos. En el año 1613, Cataldi encontró aproximaciones para las raíces cuadradas de números utilizando fracciones continuas, sin realizar una investigación detallada de éstas (Murillo, 2015).

Las fracciones continuas desde que se formalizaron han sido estudiadas y desarrolladas desde diferentes enfoques. Uno de ellos, aparte del algebraico, es desde el punto de vista del cálculo, donde John Wallis (1616-1703) empieza a vislumbrar, por ejemplo, que un número irracional no algebraico (aquel que no es solución de ninguna ecuación polinómica con coeficientes racionales) también tiene una representación en fracción continua (Recalde & Vargas, 2013).

Un siglo más tarde Euler (1707-1783), Lambert (1728-1777) y Lagrange (1736-1813), establecen definitivamente sus fundamentos teóricos (Redondo Buitrago & Haro Delicado, 2005).

El campo de aplicaciones de las fracciones continuas es actualmente muy amplio y en desarrollo. Se ha encontrado su utilidad en áreas como: análisis numérico (algoritmos), teoría de números, física matemática (teoría cuántica), estadística y probabilidad (distribución de probabilidad), etc.

3. Fracciones continuas simples finitas e infinitas

Después de un proceso evolutivo, la notación actual para representar a una fracción continua simple o regular es la siguiente:

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

donde el término a_0 (positivo, negativo ocero), representa la parte entera de la fracción, y los elementos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ serán enteros positivos a quienes llamaremos los cocientes parciales de la fracción continua. El número de elementos puede ser finito o infinito. Para el caso finito la llamaremos una fracción continua finita de orden n. Para el segundo caso la llamaremos una fracción continua infinita.

Cada fracción continua finita es el resultado de un número finito de operaciones racionales sobre sus elementos, y si todos los elementos son números racionales, la fracción misma representará a un número racional. Para el caso de una fracción continua infinita se ha demostradoque siempre representará a un número irracional (Villacampa, 2019).

Observe que la notación inicial de una fracción continua es difícil de manejar, especialmente si es infinita, por lo que se ha diseñado una notación más corta y elegante que, al mismo tiempo, representa su propio desarrollo. Se ha convenido en escribir a una fracción continua con la notación:

$$[a_0;\ a_1, a_2, a_3, \dots]$$

Donde a_0 representa a la parte entera del número que siempre será separado por punto y coma. Los siguientes elementos a_1, a_2, a_3 representarán sus cocientes parciales. Con lo anterior se ejemplifica, con sus dos notaciones, auna fracción contínua finita,ecuación(3.1):

$$\frac{67}{29} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}} = [2; 3,4,2] \tag{3.1}$$

y una fracción continua infinita, ecuación (3.2):

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\dots}}} = [1; 2,2,2, \dots] \tag{3.2}$$

Aprovechando el ejemplo anterior, si los elementos de los cocientes parciales, llamados también los índices de la fracción, son iguales e infinitos, en este caso el 2, la llamaremos *fracción continua periódica*, con periodo 2, indicando a este último con una barra superior sobre el elemento repetitivo. De esta forma $\sqrt{2}$ quedaría representado como:

$$\sqrt{2} = [1;\ 2.2,2, \dots] = [1;\ \bar{2}]$$

Cabe señalar que a las fracciones continuas como $2 + \sqrt{7} = [\overline{4; 1,1,1}]$, donde el periodo incluye a la parte entera de la fracción,se les denomina *fracciones continuas periódicas puras*.

4. Avances e importancia de las fracciones continuas

Uno de los elementos interesantes en el desarrollo y estudio de las fracciones continuas es el denominado árbol de Farey, conocido también como árbol de Stern-Brocot. Este diagrama puede proporcionarnos datos interesantes de una fracción continua, a saber: el calcular las fracciones parciales rápidamente, el determinar sus convergentes, de sus recorridos y cómo obtener su expansión compacta y extendida. Tiene un parecido con el triángulo de Pascal, en el sentido de que si se requiere una expansión mayor en particular, se deberán desarrollar sus renglones anteriores.

Existen más algoritmos para desarrollar una fracción continua (Mikloško, 1977), donde se compara su proceso y eficiencia entre sí, mostrando el tipo de operaciones y cuántos cálculos deben hacerse para obtener el n-simo término de una fracción continua.

Por último, la importancia de las fracciones continuas no es casual, ya que se han encontrado muchas situaciones donde éstas juegan un papel importante. Por ejemplo: el combinar fracciones continuas con los conceptos de proporción áurea y números de Fibonacci, la ecuación de Pell, engranajes y periodos de revolución de planetas, entre otros (López Villanueva, 2019).

Las fracciones continuas simples se han estudiado en ecuaciones matemáticas, como en la solución de la Ecuación Diofantina lineal y en la congruencia $ax \equiv b\ (mód\ m)$. De igual forma se definen la suma y la resta de las fracciones continuas simples (Mugassabi & Mistiri, 2015).

Por lo anterior, es necesario que se inicie el estudio de las fracciones continuas en el nivel medio superior, donde la habilidad aritmética y algebraica del estudiante está más madura y donde puede mostrarse la belleza de las fracciones continuas y, a la vez, de la matemática en general.

5. La fracción continua más simple

A manera de incentivar la curiosidad del estudiante, se podría preguntar qué número representa la pintoresca fracción continua periódica formada por sólo unos:

$$y = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}$$

Observe que cada nivel (o escalón) que se va generando en la fracción continua se tiene otra fracción continua con la misma estructura que la fracción original, y como es impráctico manejar los periodos infinitos, la estrategia es sustituir la segunda fracción infinita (en rojo) por la misma variable y (de manera recursiva), esto queda como:

$$y = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}} = 1 + \frac{1}{y} \tag{5.2}$$

La expresión resultante de la ecuación 5.2 es:

$$y = 1 + \frac{1}{y} \tag{5.3}$$

Igualando a cero queda:

$$y^2 - y - 1 = 0$$

Aplicando la fórmula general de segundo grado a la ecuación anterior, tenemos:

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Seleccionando el valor positivo de la raíz obtenemos el número:

$$y_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618 \ldots$$

Esta expresión se conoce como *proporción áurea*, *número áureoo número de oro* denotado por la letra griega phi: ϕ = 1.61803398875 … De lo anterior tenemos lo siguiente:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}} = [1;1,1,1\ldots] = [1;\bar{1}]$$

El valor$y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, al ser negativo, no tiene un sentido geometrico de distancia ni de proporcionalidad válido como su conjugado.

6. Obtención de una fracción continua finita

El algoritmo de Euclides es utilizado para construir la fracción continua de un número real, en particular, el de una fracción propia o impropia. Este proceso se realiza con divisiones sucesivas entre los cocientes y sus residuos que surgen al hacer la divisón de la fracción en cuestión, como lo indica el algoritmo, pero la novedad estriba en que la fracción propia resultante se invierte multiplicativamente para obtener una fracción impropia y poder obtener de su división un nuevo entero y una nueva fracción propia. Si este procesose repite sucesivamente, se irá construyendo la fracción continua correspondiente (finita o infinita).

Para expicar el proceso anterior se obtendrá la fracción continua finita del cociente 128/37 (Cuadro 6.1).

ISSN: 2711--1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 4 No. 1/2 (2023), pp. 5-25.

	Algoritmo de Euclides	**Generación de fracciones mixtas**	**Fracción continua**
Fracción Inicial / Divisiones		$\frac{\mathbf{128}}{\mathbf{37}}$	
1a división	$\mathbf{128} = \mathbf{37} \times \mathbf{3} + 17$	$\frac{128}{37} = \mathbf{3} + \frac{17}{37}$	$\frac{128}{37} = \mathbf{3} + \frac{1}{\frac{\mathbf{37}}{\mathbf{17}}}$
2a división	$\mathbf{37} = \mathbf{17} \times \mathbf{2} + 3$	$\frac{37}{17} = \mathbf{2} + \frac{3}{17}$	$\frac{128}{37} = \mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{2} + \frac{1}{\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{3}}}}$
3a división	$\mathbf{17} = \mathbf{3} \times \mathbf{5} + 2$	$\frac{17}{3} = \mathbf{5} + \frac{2}{3}$	$\frac{128}{37} = \mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{5} + \frac{1}{\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}}}}$
4a división	$\mathbf{3} = \mathbf{2} \times \mathbf{1} + 1$	$\frac{3}{2} = \mathbf{1} + \frac{1}{2}$	$\frac{128}{37} = \mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{5} + \frac{1}{\mathbf{1} + \frac{1}{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}}}}}}$
5a división	$\mathbf{2} = \mathbf{1} \times \mathbf{2} + 0$	$\frac{2}{1} = \mathbf{2} + \frac{0}{1}$	$\frac{128}{37} = \mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{2} + \frac{1}{\mathbf{5} + \frac{1}{\mathbf{1} + \frac{1}{\mathbf{2}}}}}$

CUADRO 6.1

7. Fracciones continuas y la geometría

Las fracciones continuas nacieron inicialmente de un proceso aritmético utilizando el algoritmo de la división de Euclides. Sin embargo, también es posible obtener fracciones continuas de un número real utilizando elementos de la geometría clásica Euclidiana.

El siguiente ejemplo muestra cómo el paradójico número $\sqrt{2}$ de Pitágoras, que surge históricamente de la diagonal de un cuadrado, se puede representar en forma de una fracción continua con base en las propiedades geométricas conjuntas entre un cuadrado y una semicircunferencia (Moore, 1964).

Considere un cuadrado de lado AB de longitud la unidad con una semicircunferencia con centro en el vértice C y diámetro sobre la diagonal extendida (Fig. 7.1)

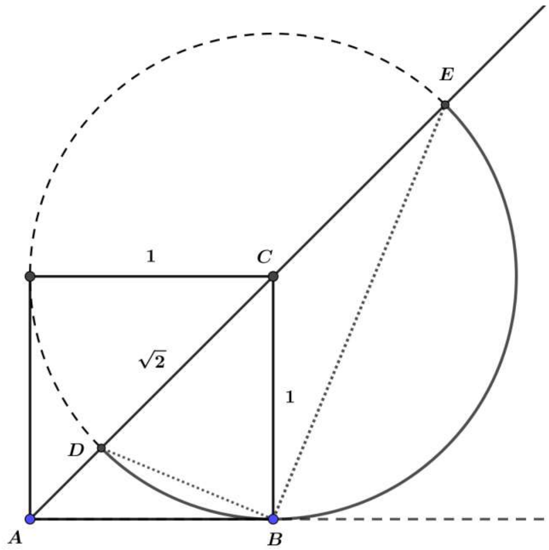

Figura 7.1

Por el teorema de Pitágoras, la diagonal del cuadrado mide:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2}$$

La teoría de fracciones continuas requiere expresar al número $\sqrt{2}$ en forma defracción. Para ello se utiliza la diagonal del cuadrado, como lo hizo Pitágoras, para representar gráficamente dicha longitud. En este caso formamos con la hipotenusa y el cateto AB la fracción:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{AC}{AB}$$

De la figura, debemos representara dicha fracción con un entero y su parte decimal. Obsérvese que por construcción se tiene que el radio de la circunferencia es:

$$DC = BC = AB = 1$$

así:

$$\sqrt{2} = \frac{AC}{AB} = \frac{DC + AD}{AB} = \frac{AB + AD}{AB} = 1 + \frac{AD}{AB}$$

De la figura se observa que $DA<BC$ lo que implica que AD/BC es una fracción propia y, por construcción, se sustituye dicha fracción por su inversa multiplicativa, obteniendo:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{AD}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AD}} \tag{7.1}$$

En figura 7.1 los triángulos ADB y ABE son semejantes, cumpliéndose la proporción:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} \tag{7.2}$$

Sustituyendo la expresión (7.2) en la (7.1) tenemos:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{AD}{AB} = 1 + \frac{1}{\frac{AB}{AD}} = 1 + \frac{1}{\frac{AE}{AB}} \tag{7.3}$$

Como DC = AB (el radio) tenemos:

$$DE = 2DC = 2AB$$

Entonces AE queda como:

$$AE = AD + DE = AD + 2AB \tag{7.4}$$

Sustituyendo (7.4) en la expresión (7.3) se tiene:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\frac{AE}{AB}} = 1 + \frac{1}{\frac{AD + 2AB}{AB}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{AD}}} \tag{7.5}$$

Nuevamente se repite la fracción:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} = 2 + \frac{AD}{AB} \tag{7.6}$$

Sustituyendo la expresión (7.6) en la última fracción de (7.5) obtenemos:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{AD}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{AB}{AD}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{AD}{AB}}}} \tag{7.7}$$

Se observa que de forma recursiva reaparece la expresión (7.6) en la nueva fracción de la ecuación (7.7), indicando que dicha fracción continua es simple, infinita y periódica, y aunado a lo mencionado anteriormente (Pág. 4), se demuestra además que $\sqrt{2}$ es irracional.

8. El Árbol de Farey o Árbol de Stern-Brocot

John Farey (1766-1826) fue un geólogo y escritor inglés, nacido en Woburn, Bedfordshire. Su nombre es conocido por desarrollar la sucesión de Farey, la cual surgió de sus investigaciones en las matemáticas del sonido. Posteriormente el conocido árbol de Farey fue descubierto independientemente por Moritz Stern (1858) y Achille Brocot (1861), con base en la sucesión de Farey, que en teoría de números se le conoce como *árbol de Stern-Brocot*.

El árbol de Farey (Solà-Soler, 2014) es un método gráfico que permite calcular y ordenar todos los elementos que conforman la fracción continua de un número real.

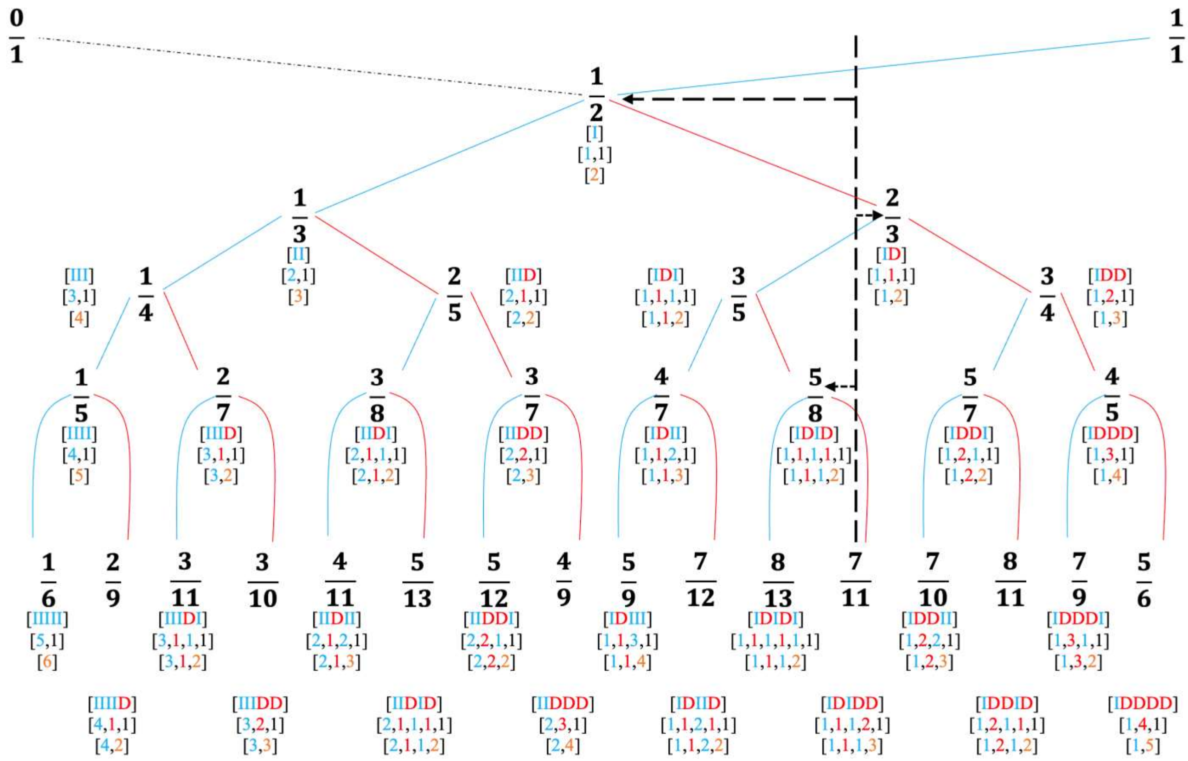

Figura 8.1 Árbol de Farey

Para generar el árbol de un número (Fig. 8.1), se inicia con dos fracciones: 0/1 y 1/1 colocadas en los extremos superiores izquierdo y derecho de una hoja. A cada una de las fracciones que se encuentran por debajo de éstas, en su parte central, se les llaman *mediantes* de los dos números racionales. Es decir, la *mediante* es la nueva fracción que resulta de sumar los numeradores y denominadores de las fracciones anteriores por separado. Por ejemplo, en el segundo renglón del árbol, la fracción 1/2 es la mediante de las dos fracciones 0/1 y 1/1, es decir:

$$\frac{0}{1}+\frac{1}{1}=\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

La fracción así obtenida se localiza entre las fracciones iniciales $0/1$ y $1/1$. Ahora, para seguir obteniendo más fracciones mediantes, se consideran el ancestro inmediato por la izquierda, 0/1 y el ancestro inmediato por la derecha, 1/2; la fracción mediante resultante es 1/3. Para la siguiente fracción mediante se toma el ancestro inmediato por la izquierda, 1/2 y el ancestro inmediato por la derecha, 1/1, y la fracción mediante resultante es 2/3. De esta manera obtenemos la siguiente cadena de fracciones mediantes consecutivas:

$$\frac{1}{0} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{1}{1}$$

Con el mismo procedimiento, se tiene la siguiente cadena de fracciones mediantes consecutivas:

$$\frac{0}{1} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{1}{1}$$

En esta última cadena se puede observar una propiedad referente a dos fracciones mediantes consecutivas. Si se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda y se le resta el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda, el resultado es 1.Por ejemplo, considérense las dos fracciones consecutivas:

$$\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$$

Donde se cumple que:

$$3 \cdot 2 - 1 \cdot 5 = 1$$

Esta expresión en particular satisface la identidad de Bézout, es decir: los números 3 y 5 están en combinación lineal entera con el 1, su máximo común divisor, en forma de ecuación entera Diofántica $3x + 5y = 1$, donde la solución es $x = 2$ y $y = -1$. Esta propiedad ya demostrada (Czwienczek, 2023) expresa que: "toda fracción positiva e irreducible es la mediante de dos fracciones consecutivas".

El árbol de Farey construido tiene dos ramificaciones (líneas) para cada fracción, diferenciadas con dos colores: el color azul indica un recorrido a la izquierda y etiquetado con la letra I (Izquierda), y el color rojo indica un recorrido a la derecha, etiquetado con la letra D (Derecha). Así mismo, y bajo cada fracción, se escriben tres expresiones diferentes agrupadas por corchetes con indicadores especiales.

Para explicar lo anterior se obtendrá la fracción continua de 4/7. La primera notación [IDII] indica el recorrido usado para llegar a dicha fracción, donde la primera letra a la izquierda (I) indica el inicio del recorrido desde la fracción 1/1 y llegando a la fracción 1/2, la letra (D) es el segundo recorrido para llegar a la fracción 2/3; la tercera letra (I), se llega a la fracción 3/5 por la izquierda. Finalmente, el último recorrido a la izquierda (I) se llega a la fracción buscada 4/7.

La segunda expresión en corchetes [1,1,2,1], expresa el recorrido para llegar a la fracción 4/7 y a la vez muestra los cocientes generados de la fracción continua de 4/7. Es decir, partiendo de la misma fracción 1/1, se tiene: 1 recorrido a la izquierda, luego 1 recorrido a la derecha, 2 recorridos a la izquierda, y el último número "1" es un recorrido "adicional" de ajuste en color negro (éste debe ser diferente al penúltimo, es decir, si el recorrido anterior al último fue a la izquierda, entonces el último recorrido será a la derecha o viceversa, la finalidad es que se termine con un recorrido diferente a los que se siguieron para llegar a la fracción propuesta), por lo tanto, en el caso de la fracción 4/7, su fracción continua extendida es:

$$\frac{4}{7}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}$$

El último corchete corresponde a la fracción continua compacta, ésta se obtiene del anterior, donde su última cifra, en color naranja, es la suma de las dos últimas cifras de la fracción continua extendida. Así, para la fracción 4/7, su fracción continua compacta es [1,1,3]. De lo anterior se obtiene:

$$\frac{4}{7}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}$$

Por otra parte, en el árbol de Farey se le asigna a cada fracción mediante un número que corresponde a su posición relativa dentro del árbol. Dicha numeración comienza desde la fracción $1/2$ (posición 1) hacia abajo y de derecha a izquierda para cada renglón inferior del árbol hasta llegar a la fracción $4/7$, al que le corresponde la posición 11.

La tabla 8.1 muestra, en la primera y segunda columnas, la numeración ordenada de la posición de cada fracción y la fracción misma en el árbol de Farey.

Posición	Fracción	Fracción continua		Posición (Binario)
		Compacta	Extendida	
1	1/2	[2]	[1,1]	1
2	2/3	[1,2]	[1,1,1]	10
3	1/3	[3]	[2,1]	11
4	3/4	[1,3]	[1,2,1]	100
5	3/5	[1,1,2]	[1,1,1,1]	101
6	2/5	[2,2]	[2,1,1]	110
7	1/4	[4]	[3,1]	111
8	4/5	[1,4]	[1,3,1]	1000
9	5/7	[1,2,2]	[1,2,1,1]	1001
10	5/8	[1,1,1,2]	[1,1,1,1,1]	1010
11	4/7	[1,1,3]	[1,1,2,1]	1011
12	3/7	[2,3]	[2,2,1]	1100
13	3/8	[2,1,2]	[2,1,1,1]	1101
14	2/7	[3,2]	[3,1,1]	1110
15	1/5	[5]	[4,1]	1111
16	5/6	[1,5]	[1,4,1]	10000
17	7/9	[1,3,2]	[1,3,1,1]	10001
18	8/11	[1,2,1,2]	[1,2,1,1,1]	10010
19	7/10	[1,2,3]	[1,2,2,1]	10011
20	7/11	[1,1,1,3]	[1,1,1,2,1]	10100
21	8/13	[1,1,1,2]	[1,1,1,1,1,1]	10101
22	7/12	[1,1,2,2]	[1,1,2,1,1]	10110
23	5/9	[1,1,4]	[1,1,3,1]	10111
24	4/9	[2,4]	[2,3,1]	11000
25	5/12	[2,2,2]	[2,2,1,1]	11001
26	5/13	[2,1,1,2]	[2,1,1,1,1]	11010
27	4/11	[2,1,3]	[2,1,2,1]	11011
28	3/10	[3,3]	[3,2,1]	11100
29	3/11	[3,1,2]	[3,1,1,1]	11101
30	2/9	[4,2]	[4,1,1]	11110
31	1/6	[6]	[5,1]	11111

Tabla. 8.1.- Resumen del árbol de Farey

En la tercera y cuarta columnas de la tabla se encuentran las sucesiones de números que conforman las fracciones continuas en su forma compacta y extendida. En la última columna se encuentra la representación binaria del número de cada posición, en el cual sus dígitos guardan una relación con los desplazamientos que se siguen en el árbol de Farey, es decir, los desplazamientos a la izquierda en color azul corresponden a la cifra “1” del número binario, y los desplazamientos hacia la derecha de color rojo corresponden a la cifra “0”. Así, por ejemplo, en el renglón 9 se encuentra la fracción 5/7, tiene como fracción continua extendida la sucesión de números, [1,2,1,1], el primer número a la izquierda, el “1” en color azul, corresponde a la primera cifra del número binario, el segundo número es el “2” en color rojo, que indica dos ceros en el número binario, luego un “1” en color azul, por lo tanto el número binario es 1001 (hay que recordar que el último “1” a la derecha de la sucesión se agrega como ajuste del método de la construcción, por eso no aparece en el numeral binario).

Para el manejo y cálculo de una fracción continua se crea el concepto de fracción *convergente*: una fracción parcial extraída de la fracción continua. Por ejemplo, considere la fracción 7/11 con fracción continua:

$$\frac{7}{11} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{1}}}}} = 0.6364$$

Para obtener el primer *convergente* se elimina la fracción del tercer nivel, quedando:

$$C_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Para el segundo convergente se elimina la fracción del cuarto nivel, quedando:

$$C_2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} = 0.\overline{6}$$

Para el último convergente se elimina el quinto nivel:

$$C_3 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \frac{2}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8} = 0.625$$

Los convergentes se obtienen del árbol de Farey (fig. 7.1) dibujando una línea vertical por encima de 7/11. Sus convergentes son las fracciones más cercanas y alternadas a la línea, indicadas con flechas. Observe que los decimales de cada convergente, se acercan a 0.6364.

Para finalizar, en la tabla se observan renglones sombreados en color azul, estos tienen la característica de que la sucesión de números en la fracción continua extendida está formada únicamente por unos, y son las fracciones que se forman con las cifras que aparecen en la sucesión de Fibonacci dividiendo uno de ellos entre el inmediato siguiente. Por ejemplo, si en la sucesión de Fibonacci algunos números son:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Al dividir 8/13, la fracción continua extendida tendría seis unos, si este proceso se siguiera con números más grandes de la sucesión de Fibonacci, estas fracciones se aproximarían a $1/\varphi$, donde φ es el número áureo, así se tiene que la fracción continua de $1/\varphi$ está dada por una sucesión infinita periódica formada por unos, es decir:

$$\frac{1}{\phi} = [1,1,1,1, \ldots] = [\bar{1}]$$

Observe que esto se deduce también de la ecuación (5.3), $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$, esto implica que:

$$\frac{1}{\phi} = \phi - 1 = [1; 1,1,1, \ldots] - 1 = [0; ,1,1,1, \ldots] = [1,1,1, \ldots] = [\bar{1}]$$

Conclusiones

Las fracciones continuas desde su origen, siguen cautivando al lector por su elegancia y sencillez para obtener, en principio, una fracción (y su decimal) más próximo a un número real dado. Así mismo, sorprende la variedad de problemas físicos y matemáticos donde su aplicación ha sido central. Su continuo estudio ha generado más algoritmos y procesos valiosos. La comprensión y manejo de sus propiedades deberían estudiarse obligadamente desde el nivel medio superior para que el estudiante pueda percatarse de que la matemática es interesante *per se* y, principalmente, útil en las ciencias. Este artículo está dirigido a los estudiantes y docentes que deseen conocer la belleza y utilidad de las maravillosas fracciones continuas.

Reconocimientos

Este documento se originó gracias al diplomado en línea ofrecido por la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM),en el segundo semestre de 2023, como contribución a la capacitación y actualización docente en el nivel medio superior.

Uno de los temas del diplomado, dictado por el Dr. César Guevara Bravo, versó sobre fracciones continuas y su didáctica, quién apuntó que es posible llamar la atención de los estudiantes con temas como estos por su sencillez en su concepto y construcción, así como su utilidad para entender la idea de proximidad (previo al concepto formal de límite) a cualquier fracción en forma también fraccionaria.

El Dr. Leonardo I. Martínez Sandoval, responsable del diplomado y promotor para la publicación de este trabajo, apuntó que los docentes a este nivel deben saber difundir con rigor sus apuntes, demostraciones y materiales didácticos que muestren la belleza y sencillez de temas matemáticos semejantes. Con esto, los autores esperan que los estudiantes y docentes se apropien de éste y otros conocimientos matemáticos necesarios en cualquier sociedad.

Referencias y bibliografía

Beskin, N., *Fracciones Maravillosas*. Lecciones populares de matemáticas. Editorial MIR, Moscú, 1987.

Burton, D. M., *Elementary Number Theory* (Revised edition). Allin and Bacon, 1980.

Czwienczek, F., *El árbol de Stern-Brocot*. Espacio Matemático, *1*(1) (2020). 38-49. Obtenido de https://revistas.uan.edu.co/index.php/espaciomatematico/article/view/1624

Jones, W. B., Trhon, J. W., *Continued fractions: analytic theory and applications*. (G.-C. Rota, Ed.) Cambridge University Press 1984. doi:https://doi.org/10.1017/CBO9780511759550.005

López Villacampa, A., *Aplicaciones de las fracciones continuas*. Publicació electrònica de divulgació del Departament de Matemàtiques de la Universitat Autònoma de Barcelona, *2019*, 35. (A. Gasull , & G. Guasp, Edits.) Barcelona, España. Recuperado el 10 de 2023, de www.mat.uab.cat/matmat.

Majumdar, P., *A rationale of Brahmagupta's method of solving ax+c=by.* Indian J. Hist. Sci, **16** (1981), 111-117.

Mikloško, J., *An algorithm for calculating continued fractions*. Journal of Computational and Applied Mathematics, **3**(4), (1977), 273-275. Recuperado el 09 de 2013, de https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042777800204

Moore, C. G.. *An Introduction to Continued Fractions.* National Council of Teachers of Mathematics, 83-84, (1964). Recuperado el 09 de 2013, de ERIC: https://eric.ed.gov/?id=ED035543

Mugassabi, S., Mistiri, F., *The Elementary Arithmetic Operators of Contiued Fractions*. Am-Euras. J. Sci.Res, **10**(5) (2015), 251-263.

Murillo, T. M., *Sobre las fracciones continuas: Aplicaciones y curiosidades*. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, **15**(2) (2015), 1-26. Recuperado el 09 de 2013, de https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=607973017003

Olds, C., *Continued fractions.* The Mathematical Association of America, 1963.

Recalde, L. C., Vargas, V. L., *Las fracciones continuas en el desarrollo histórico de los números reales*. Lecturas Matemáticas, **34**(1) (2013), 131-148.

Redondo Buitrago, A., Haro Delicado, M. J., *Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonnacci.* SUMMA, (2005) 53-63. Recuperado el 09 de 2013, de https://revistasuma.fespm.es/revistas-revistas/revista-50.html

Solà-Soler, J., *Fracciones continuas*. (2014) Recuperado el 09 de 2023, de Geometría sagrada: https://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/fracciones-continuas

Vargas, E. H., Pérez, M. J., *El método de las fracciones continuas y su significación didáctica en el proceso de formación del ingeniero en telecomunicacciones y electrónica*. Revista Mendive, **12**(47), (2014) 335-340. Recuperado el 01 de 09 de 2023, de http://mendive.upr.edu.cu/index.php/MendiveUPR/article/view/701/700

Javier M. Zariñán (fismatjaz@gmail.com)

Docente-Tutor-Investigador de la Academia de Matemáticas del IEMS-CDMX

Roberto Albino (albinobnz@gmail.com)

ENP, UNAM, CDMX, México

Miguel A. Rivera (rivera@cch.unam.mx)

CCH, UNAM, CDMX, México