ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 4 No. 1/2 (2023), pp. 60–75

El icosaedro euclidiano

Douglas Jiménez

Resumen

La descripción euclidiana de la construcción de los sólidos regulares o platónicos en los *Elementos* es bastante detallada y precisa para cada uno de los cinco casos. No obstante, las dificultades de Euclides para representar figuras espaciales en el plano (faltaban aún muchos años para que se inventara el concepto de perspectiva) son un obstáculo para la fluidez de la lectura. Disponer de avances tecnológicos como Geogebra, por ejemplo, nos permite facilitar esa lectura. En particular, el del icosaedro es uno de los dibujos más difíciles de seguir, razón por la cual le dedicamos este ensayo a esa exposición centrándonos en la figura y manteniendo su esencialidad.

Palabras y frases clave: Sólidos platónicos, razón áurea, icosaedro.

The euclidean icosahedron

Abstract

Euclidean's description of the construction of regular or Platonic solids in the *Elements* is quite detailed and precise for each of the five cases. However, Euclid's difficulties in representing spatial figures on the plane (the concept of perspective was still many years away from being invented) are an obstacle to the fluidity of reading. Having technological advances such as Geogebra, for example, allows us to facilitate this reading. In particular, the icosahedron is one of the most difficult drawings to follow, which is why we dedicate this essay to that exhibition, focusing on the figure and maintaining its essentiality.

Key words and phrases: Platonic solids, golden section, icosahedron.

1. Introducción

De acuerdo al historiador Proclo ([3], pág. 57), los *Elementos* de Euclides fueron escritos por el alejandrino con la intención expresa de exponer los hoy llamados *sólidos platónicos*, vale decir los solidos cuyas caras son polígonos regulares y sus vértices están todos en la misma esfera. Solo son cinco, como lo demostró el propio Euclides en el cierre de su monumental obra; los podemos ver en la figura 1.

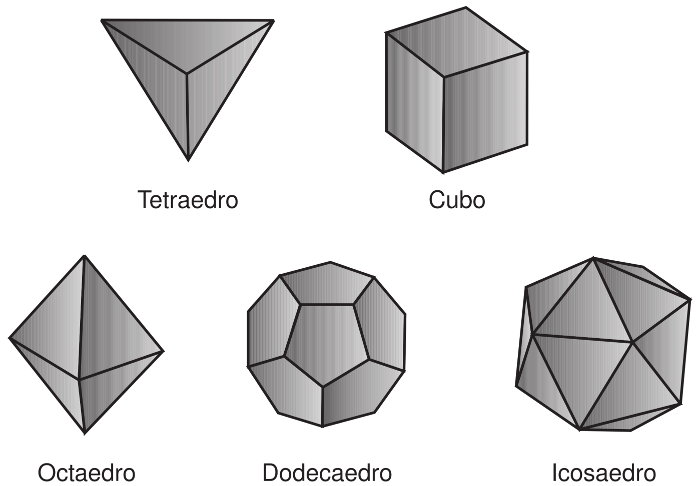


Figura 1: Sólidos platónicos

Más allá de la pretensión de Proclo, cuya validez es harto discutible, la lectura de las demostraciones euclidianas relacionadas con estos sólidos demuestra una penetración y maestría asombrosas en la geometría del espacio. En este artículo estamos interesados particularmente en el icosaedro, puesto que en la construcción y análisis de este cuerpo Euclides hace uso de lo más pesado de su potente artillería intelectual, de manera que la demostración se convierte en una muestra muy representativa de lo que podemos ganar con la lectura de este libro clásico.

2. El problema y su planteamiento

Los tres últimos libros (XI, XII y XIII) de los *Elementos* están dedicados a la geometría del espacio. El XIII, particularmente, aborda la geometría de los sólidos platónicos y muestra para cada uno de ellos cómo pueden inscribirse dentro de una esfera de radio predeterminado. El icosaedro específicamente corresponde a la proposición XIII.16, es decir la proposición 16 del libro XIII. Para la transcripción de los enunciados de las proposiciones de Euclides usaremos a María Luisa Puertas Castaño ([2]), pero para las ilustraciones preferiremos a Heath ([1]); la razón de esta preferencia es que en Puertas Castaño el uso de letras griegas para referirse a los puntos del dibujo dificulta la lectura de unos gráficos que, de por sí, ya son lectura difícil.

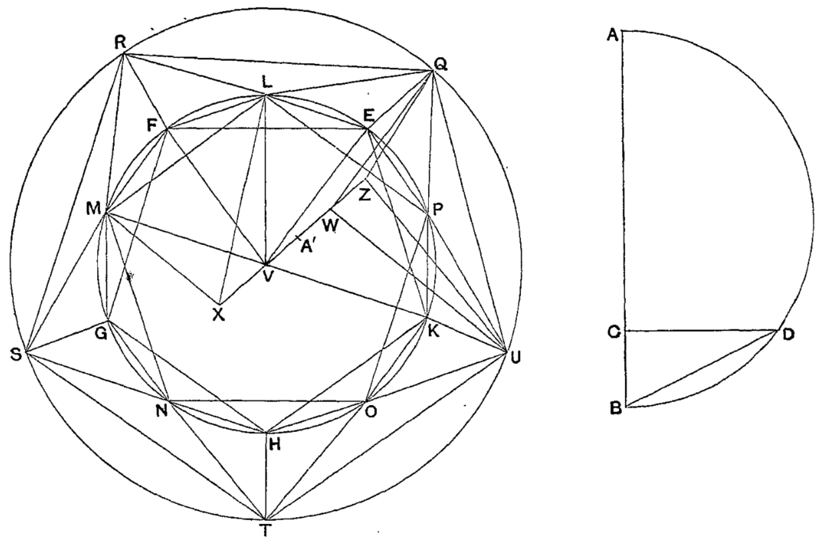


Figura 2: Proposición XIII.16: construcción del icosaedro. (Ilustración de Heath)

El enunciado de la proposición XIII.16 es

> Construir un icosaedro y envolverlo en una esfera, como en las figuras antedichas, y demostrar que el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada "menor".

La simplicidad del enunciado oculta la cantidad de detalles necesarios para exponer la demostración. En este trabajo no haremos otra cosa que seguir en detalle el discurso euclidiano, pero con una presentación gráfica que debe facilitar la lectura que el dibujo original dificulta. Ese dibujo, tal como lo transcribe Heath es el que vemos en la figura 2.

Como ya dijimos, mantendremos las notaciones provistas por Heath para que nuestra exposición vaya pareja con la de este historiador y traductor y, por consiguiente, con la exposición euclidiana. Proponemos ilustraciones provenientes de una presentación Geogebra realizada por el autor de este artículo, la cual puede verse en `https://www.geogebra.org/m/ebhyey29`.

La frase del enunciado "como en las figuras antedichas" significa que ya Euclides trató en proposiciones anteriores a otros sólidos platónicos: el tetraedro o pirámide en XIII.13, el octaedro en XIII.14 y el cubo en XIII.15. Para todas ellas comienza prefijando el radio de la esfera en la que será inscrito el sólido en estudio, pero la justificación de este radio queda para el final de las demostraciones.

En la demostración que queremos estudiar en este ensayo juegan papel fundamental tanto el pentágono como el número áureo a él asociado. Veremos en la próxima sección los requisitos teóricos para esta demostración.

3. Requisitos teóricos

Los *Elementos* conforman una obra histórica a pesar de que su autor, Euclides, no hizo referencia alguna de este tipo en cualquiera de los trece tomos que los constituyen. Lo que hoy conocemos como *teorema de Pitágoras* en los *Elementos* es simplemente la proposición I.47, la cual lleva una demostración que Proclo reconoce como genuinamente euclidiana. Ni siquiera lo enunciaremos, pero su aparición tanto en la obra de Euclides como la de otros geómetras -Arquímedes o Apolonio, por ejemplo- lo identifican como un teorema esencial del conocimiento matemático general.

En la proposición IV.15 Euclides muestra cómo inscribir un hexágono regular en una circunferencia dada. Tal demostración hace que el hexágono sea el polígono regular más fácil de construir: su lado es igual al radio de la circunferencia.

Las proposiciones VI.8 y VI.13 están profundamente relacionadas entre sí y terminan dando una caracterización de la circunferencia que fue imprescindible para el trabajo de Apolonio en sus libros sobre cónicas. El enunciado de VI.8 es

> Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo entero y entre sí

mientras que VI.13 es de enunciado más breve puesto que se trata de una construcción:

> Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.

Las ilustraciones respectivas en los *Elementos* están en la figura 3, lo cual da una idea de la profunda relación que las une. Por su parte, VI.13 puede expresarse aritméticamente en la forma $DA^2 = (BD)(DC)$, que es, como ya dijimos anteriormente, la caracterización de la circunferencia de diámetro BC.

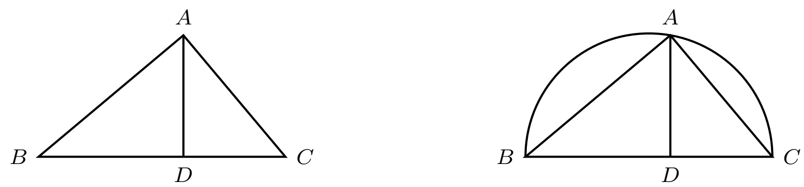
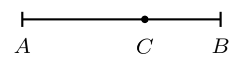


Figura 3: Proposiciones VI.8 y VI.13

Ya entrados en el libro XIII conseguimos abundante referencia a la sección áurea[1] que Euclides (y el matemático griego en general) denominaba *división en extrema y media razón*. El concepto aparece por primera vez (sin su nombre, por razones formales) en el libro II y se usa para una demostración importante del libro IV. Se define por su propio nombre en el libro VI, pero no es hasta el libro XIII donde demuestra todo su poder. Recordemos primero qué significa.

Un segmento $\overline{AB}$ está dividido en razón áurea por un punto C dentro de él, si la razón entre todo el segmento y la parte mayor del corte es igual a la razón entre dicha parte mayor y la parte menor. En la figura a la derecha se tendría



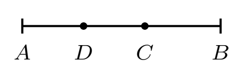
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Con la letra φ se representa al número de oro que es el que da el valor de la razón.

El número 5 aparece con bastante frecuencia en los contextos relacionados con la razón áurea. (De hecho, las diagonales de un pentágono regular se cortan en razón áurea mutuamente.) Una proposición que lo referencia y que usaremos luego es la XIII.3; dice así

> Si se corta una línea recta en extrema y media razón, el cuadrado del segmento menor junto con la mitad del segmento mayor es cinco veces el cuadrado de la mitad del segmento mayor

y la figura a la derecha nos ayuda a comprender el enunciado: el $\overline{AB}$ está separado en razón áurea por C y si D es el punto medio de $\overline{AC}$, la parte mayor de la separación, entonces $BD^2 = 5DC^2$.



[1]*Sección áurea, razón áurea, división áurea, número áureo, número de oro* son todos términos asociados a este concepto.

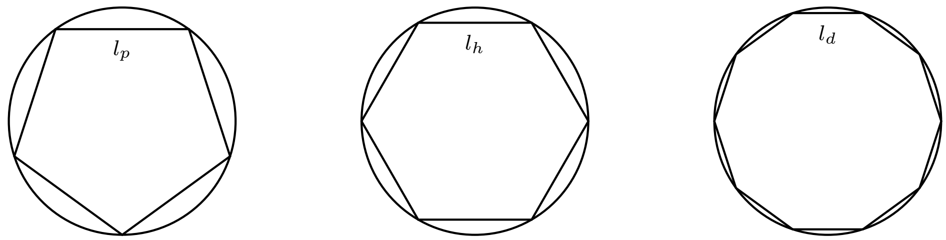


Figura 4: Pentágono, hexágono y decágono regulares en una misma circunferencia

En la figura 4 vemos una misma circunferencia en tres posiciones distintas del plano y cada una de ellas muestra, respectivamente, los polígonos regulares inscritos pentágono, hexágono y decágono. El valor de las longitudes de los lados de estos polígonos los representaremos por l_p, l_h y l_d, tal como muestra la misma figura. Con ella nos apoyaremos para dos importantes enunciados de los *Elementos*.

La proposición XIII.9 dice

> Si se unen el lado de un hexágono y el de un decágono inscritos en el mismo círculo, la recta entera queda cortada en extrema y media razón, y su segmento mayor es el lado del hexágono

lo que puede expresarse de manera aritmética de esta forma

$$\frac{l_h + l_d}{l_h} = \frac{l_h}{l_d},$$

mientras que la proposición siguiente, XIII.10, dice

> Si se inscribe un pentágono equilátero en un círculo, el cuadrado del lado del pentagono es igual a los cuadrados de los lados del hexágono y el decágono inscritos en el mismo círculo

que también tiene una expresión aritmética:

$$l_p^2 = l_h^2 + l_d^2,$$

con lo cual vamos más lejos del enunciado puesto que se nos hace claro que estos lados de estos tres polígonos dispuestos en triángulo forman un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa es el lado del pentágono.

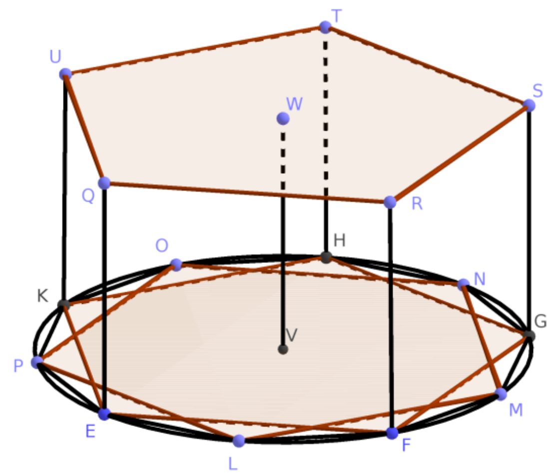


Figura 5: Generación de pentágonos guía del icosaedro

Las demostraciones de todas las proposiciones que hemos enunciado en esta sección están expuestas con el mayor detalle en los *Elementos*, que es una obra clásica y no puede uno cansarse de recomendar su lectura. Para apreciar la finura del detalle euclidiano explicaremos la demostración completa de la proposición XIII.16, ya enunciada en la página 62, y con la cual nos muestra el alejandrino la intimidad de la geometría del icosaedro regular. Recordemos que vamos a utilizar todos los elementos de la figura euclidiana original tal como los vertió Heath, con sus mismas notaciones y lo mostramos en la figura 2 de la página 62. Lo único que pretendemos en este artículo es expresar más claramente en el espacio lo que el dibujo bidimensional de Euclides nos dificulta entender. Ojalá nuestra pretensión tenga éxito.

4. Dos pentágonos de referencia

En la construcción del icosaedro hay dos pentágonos regulares que se convierten en la referencia principal para trazar los elementos visibles del sólido: vértices, aristas y caras. Es muy ingeniosa la manera en que Euclides hace aparecer esos dos pentágonos y la vamos a resumir observando la figura 5, a despecho de que el lector puede seguir la generación en movimiento usando la dirección web dada en la página 62.

Partimos de un círculo en donde se inscribe un pentágono regular $EFGHK$. El radio de este círculo dependerá del diámetro predeterminado de la esfera en donde queremos inscribir el icosaedro, pero dejaremos su determinación para el final de la demostración. Los arcos subtendidos por los lados del pentágono se dividen por la mitad con los puntos L, M, N, O, P con lo que se ganan dos nuevas figuras intervinientes en la demostración: (a) el decágono $ELFMGNHOKP$ y (b) el pentágono $LMNOP$.

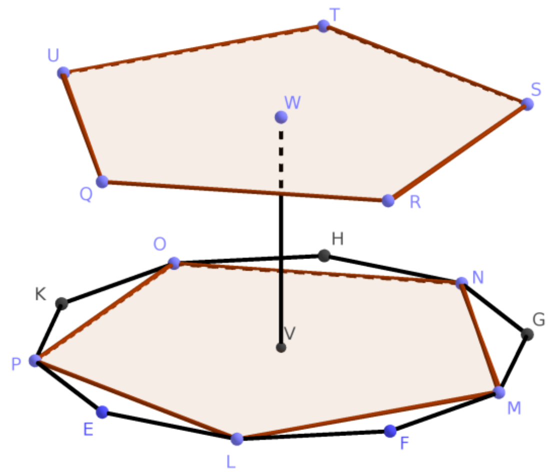


Figura 6: Pentágonos guía del icosaedro

Desde los vértices del pentágono original se erigen cinco segmentos perpendiculares al plano del pentágono, todos de longitud igual al radio del círculo; son $\overline{EQ}$, $\overline{FR}$, $\overline{GS}$, $\overline{HT}$ y $\overline{KU}$. Los extremos de esos segmentos son los vértices de un pentágono regular $QRSTU$ en un plano paralelo al plano del pentágono original y a una distancia de él igual al radio del círculo. Esa distancia se puede medir con el segmento $\overline{VW}$ que une los centros de los círculos donde están inscritos los pentágonos.

Esta ingeniosa operación euclidiana se puede describir con un lenguaje moderno: se somete un pentágono regular en un plano a la composición de dos transformaciones en el espacio: (a) una rotación de un décimo de circunferencia (36°) en su propio plano (da igual horaria que antihoraria) y (b) una traslación según un vector perpendicular al plano y de longitud igual al radio del círculo de inscripción. El resultado final se puede ver en la figura 6, donde el pentágono $QRSTU$ es la imagen del pentágono $LMNOP$ luego de la aplicación de esta composición de transformaciones.

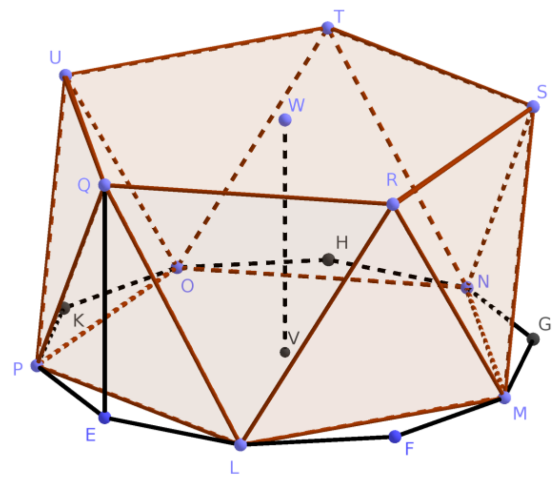


Figura 7: Caras centrales del pentágono

5. Aparecen aristas y caras

A partir de esta construcción ya podemos trazar segmentos entre los vértices de ambos pentágonos, tal como se muestra en la figura 7, en la que vemos que, como resultado de esta operación, aparecen diez triángulos, a saber:

$$\triangle LRM, \quad \triangle RMS, \quad \triangle MSN, \quad \triangle NST, \quad \triangle NTO,$$

$$\triangle TOU, \quad \triangle OUP, \quad \triangle UPQ, \quad \triangle PQL, \quad \triangle QLR.$$

En el dibujo se destaca el $\overline{QE}$ que va del vértice del pentágono superior al decágono inferior, pues este segmento es lado del triángulo $\triangle QEP$, rectángulo en E y para el cual tenemos que QE es el radio de la circunferencia y, por lo tanto, el lado del hexágono regular inscrito; además EP es el lado del decágono regular. En consecuencia, de acuerdo a la proposición XIII.10, PQ es igual al lado del pentágono. El razonamiento se puede repetir con el $\triangle QEL$ para concluir que también $\overline{QL}$ mide igual al lado del pentágono, por lo cual $\triangle PQL$ es equilátero con lado igual al lado del pentágono. Todo este párrafo se puede repetir, de manera análoga, trazando segmentos paralelos e iguales al eje $\overline{VW}$ desde los demás vértices del decágono. En conclusión, los diez triángulos destacados son equiláteros y de lado igual al lado del pentágono, por lo tanto congruentes entre sí.

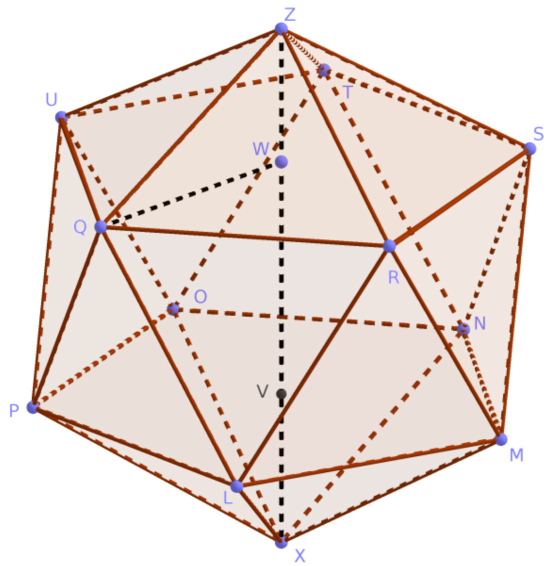


Figura 8: Todas las caras del icosaedro

6. Aún faltan diez caras

Sí. El icosaedro tiene veinte caras, pero las diez que nos faltan podrían ser las más sencillas de visualizar. En la figura 8 vemos cómo se generan: el $\overline{VW}$ se prolonga en ambos sentidos para formar un $\overline{XZ}$, tal que $VX = WZ$ y la medida común de ambos será el lado del decágono. Desde los puntos Z y X trazamos segmentos hacia los vértices de los pentágonos más cercanos, lo que nos produce los diez triángulos siguientes:

$$\triangle ZQR, \quad \triangle ZRS, \quad \triangle ZST, \quad \triangle ZTU, \quad \triangle ZUQ,$$

$$\triangle XLM, \quad \triangle XMN, \quad \triangle XNO, \quad \triangle XOP, \quad \triangle XPL.$$

Ahora bien, si trazamos el $\overline{WQ}$ vemos el $\triangle ZWQ$, rectángulo en W, y para el cual

$$ZW = \text{lado del decágono} \quad \text{y} \quad WQ = \text{radio del círculo} = \text{lado del hexágono},$$

por lo cual, aplicando la proposición XIII.10, tenemos que ZQ = lado del pentágono. Pero este razonamiento se puede repetir para todos los segmentos que se trazaron desde Z y, por simetría, también vale para los trazados desde X, con triángulos rectángulos en V. De manera que los diez nuevos triángulos son también equiláteros y su lado es igual al lado del pentágono; vale decir, son congruentes entre sí y con los diez triángulos que trazamos en la sección anterior. De manera que ya tenemos icosaedro con veinte caras congruentes.

7. Aparece la esfera

Pero solo tenemos derecho a llamar *regular* (o también *platónico*) a nuestro sólido si demostramos que sus doce vértices están en la misma esfera. Para ello volvamos a la figura 8 y pongamos la atención en tres puntos: Z, Q y X. Observemos que en el plano que los contiene tenemos la situación planteada por la figura 9.

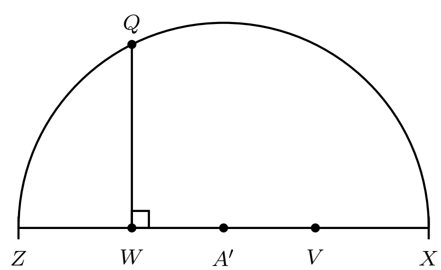


Figura 9: Evidenciando la esfera

Como WV es el radio del círculo (y, por tanto, lado del hexágono) y VX es el lado del decágono entonces, por la proposición XIII.9, $\overline{WX}$ está separado en razón áurea por V, lo que quiere decir que

$$\frac{WX}{WV} = \frac{WV}{VX},$$

pero $VX = ZW$ y $WV = WQ$, lo que convierte a la ecuación anterior en

$$\frac{WX}{WQ} = \frac{WQ}{ZW},$$

que también puede escribirse como

$$WQ^2 = (ZW)(WX),$$

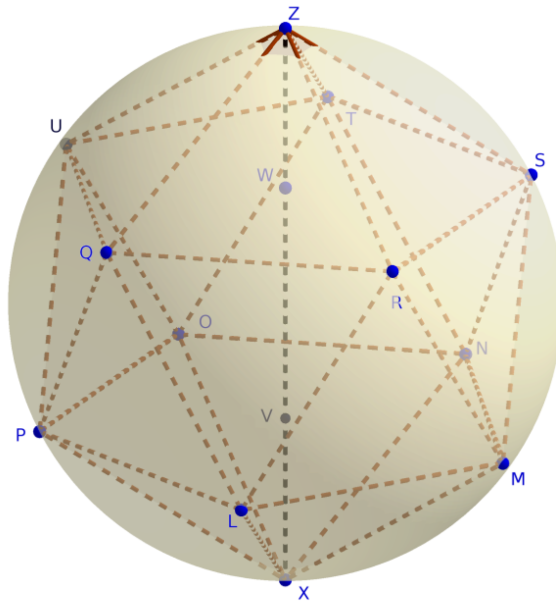


Figura 10: El icosaedro dentro de la esfera

y dada la perpendicularidad en W, aplicando la proposición VI.13 concluimos que Q está en la circunferencia de diámetro ZX.

Pero este mismo razonamiento puede hacerse sobre los cuatro vértices restantes del pentágono superior y, usando perpendiculares en el plano correspondiente, se puede hacer también sobre los cinco vértices del pentágono inferior. En conclusión: todos los vértices están sobre circunferencias de diámetro $\overline{ZX}$, lo que quiere decir que están en la esfera de diámetro $\overline{ZX}$, tal como se muestra en la figura 10.

8. ¿Podemos escoger el diámetro de la esfera?

Esta pregunta la responde Euclides desde el principio de la demostración, pero no la justifica sino al final de la misma. Evidentemente, el diámetro de la esfera envolvente está relacionado con el radio del círculo con el que iniciamos la demostración. Para convencerse basta una relectura, pero en esta sección nos proponemos identificar con precisión esa relación. Volvamos a la figura 9.

Recordemos que $\overline{VZ}$ está formado por $\overline{VW}$, el lado del hexágono, y $\overline{WZ}$, el lado del decágono, de manera que por la proposición XIII.9, $\overline{VZ}$ está separado en razón áurea por W; observemos ahora un punto que no hemos mencionado: el punto A', centro del diámetro $\overline{ZX}$ y también del $\overline{VW}$, la parte mayor de la separación áurea. Por la proposición XIII.3 se cumple que $ZA'^2 = 5A'W^2$. Ahora bien, $ZX = 2ZA'$ y $VW = 2A'W$, por lo cual $ZX^2 = 5VW^2$.

En palabras: el cuadrado del diámetro quintuplica al cuadrado del radio del círculo original de la construcción del icosaedro. Queda entonces una pregunta por contestar: dado un segmento de longitud arbitraria, ¿cómo conseguir un segmento menor tal que su cuadrado sea la quinta parte del cuadrado del segmento original? Euclides nos responde con la ilustración que presentamos en la figura 11

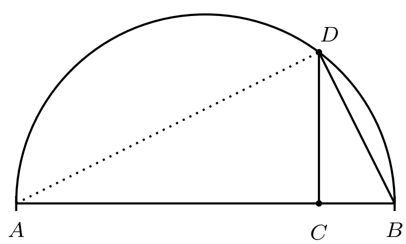


Figura 11: Conseguir la quinta parte de un cuadrado

En la misma tenemos un $\overline{AB}$ arbitrario, cuya longitud queremos que mida al diámetro de la esfera donde envolveremos el icosaedro. Para ello dividiremos el $\overline{AB}$ por C de forma que $AC = 4CB$, trazamos una semicircunferencia de diámetro AB y trazamos la perpendicular a $\overline{AB}$ por C, que corta a la semicircunferencia en D. Euclides se propone demostrar que $\overline{BD}$ es el segmento que necesita. (En la ilustración de Euclides no aparece el $\overline{AD}$, razón por la cual lo incluimos punteado.)

Ahora bien, por la proposición VI.13 y la definición de C, se tiene que

$$CD^2 = (AC)(CB) = 4CB^2,$$

pero, por Pitágoras,

$$BD^2 = CD^2 + CB^2 = 5CB^2.$$

Por otro lado, como $\triangle ADB \sim \triangle DCB$ se tiene que

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC},$$

o mejor

$$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{5BC^2}{BC^2} = 5,$$

es decir, $AB^2 = 5BD^2$.

Entonces, como conclusión de esta sección tenemos que, si queremos que AB sea el diámetro de la esfera envolvente, BD es la medida adecuada del radio del círculo inicial de nuestra demostración, es decir, del círculo en el que se inscribe el pentágono $EFGHK$ de la figura 5 de la página 66.

9. ¿Y esas extrañas palabras?

Sí: el enunciado termina con una misteriosa frase: "...el lado del icosaedro es la recta sin razón expresable llamada menor". Al cierre de cada una de las proposiciones relacionadas con los sólidos platónicos Euclides da la razón entre el radio de la esfera envolvente y el lado del poliedro que está construyendo. En realidad. el misterio desaparecería si leyéramos el libro X de los *Elementos*. Pero esta es una seria tarea que requiere de un tiempo del que no disponemos para este ensayo.[2] Este libro (el más largo de todos los *Elementos*) hace una extensa clasificación de las *inconmensurabilidades*, un concepto con el que los griegos se adelantaron en modo geométrico a lo que hoy conocemos como *números irracionales*.

En otras palabras: no explicaremos la frase por falta de tiempo y espacio, pero para no dejar en el aire este contenido vamos a considerarlo en términos modernos, sin entrar en las definiciones euclidianas sino que simplemente calcularemos las razones numéricas.

En primer lugar, la razón áurea se expresa numéricamente como

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803,$$

y aparece de manera natural en el corte de las diagonales de un pentágono regular.[3] Ese tratamiento conduce de manera bastante sencilla a la trigonometría del triángulo $54° - 36° - 90°$, que resulta de dividir en dos partes iguales el triángulo isósceles que

[2]Es interesante acotar que el matemático e historiador Simon Stevin llamó al libro X "la cruz de los matemáticos".

[3]Quien quiera ver cómo, puede consultar estos enlaces: `https://www.geogebra.org/m/yg35uhxg` o `https://youtu.be/NjuCCPArZvo`.

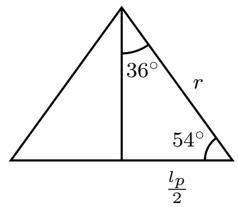


Figura 12: Cálculo de la razón entre el lado del pentágono y el radio de la circunferencia

se forma con dos lados del pentágono y la diagonal subtendida por ambos lados. Sin dar muchos detalles, escribimos

$$\operatorname{sen} 36^\circ = \cos 54^\circ = \frac{\sqrt{\varphi + 2}}{2\varphi}, \qquad \cos 36^\circ = \operatorname{sen} 54^\circ = \frac{\varphi}{2}.$$

Recordemos que el diámetro de la esfera envolvente mide una vez el lado del hexágono (radio de la circunferencia) más dos veces el lado del decágono inscritos en la misma circunferencia. A partir de la figura 12, en la que vemos el lado del pentágono, representado como l_p, y el lado del hexágono o radio r de la circunferencia, la aplicación de la trigonometría que acabamos de comentar produce

$$l_p = \sqrt{\frac{\varphi + 2}{\varphi + 1}}\, r$$

o

$$l_p = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}\, r$$

tal como lo vemos en Heath ([1]. Tomo III. Pág. 489.)

Los detalles de los cálculos anteriores quedan para el lector.

Referencias

[1] Euclid. *The thirteen books of the Elements.* (3 vols.) (Traducción, introducción y comentarios de Sir Thomas Heath.) Dover Publications, Inc. Nueva York, 1956.

[2] Euclides. *Elementos.* (3 vols.) (Introducción de Luis Vega. Traducción y notas de María Luisa Puertas Castaño.) Editorial Gredos. Madrid, 1991.

[3] Proclus. *A commentary on the first book of Euclid* Elements. (Translated with Introduction and notes, by Glenn R. Morrow.) Princeton University Press. New Jersey. 1970.

Douglas Jiménez (dougjim@gmail.com)
UNEXPO "Antonio José de Sucre". Vicerrectorado de Barquisimeto.