Espacio Matemático Vol. 4 No. 1/2 (2023), pp. 76–81

Problemas y Soluciones

José Nieto, Jorge Tipe (eds.)

El objetivo de esta sección es presentar problemas matemáticos interesantes y sus soluciones. Invitamos a los lectores a proponer problemas que puedan ser abordados por estudiantes de la escuela media o de los dos primeros años de universidad sin conocimientos especializados. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse a los editores por correo electrónico, en español, portugués o inglés. Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada. Problemas abiertos conocidos no son aceptables.

Problems and Solutions

The goal of this section is to present interesting mathematical problems and its solutions. We invite the readers to propose problems which may be tackled by high school or college students without specialized knowledge. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editors in English, Spanish or Portuguese. Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely. Known open problems are not suitable.

1 Problemas propuestos

Recordamos que se siguen recibiendo soluciones a los problemas 5, 7, 18, 20–22, 24–26 y 28–30 publicados en números anteriores.

31. Dado un conjunto finito C, definimos $S(C)$ como la suma de los elementos de C. Encuentre dos conjuntos A y B tales que su intersección es vacía, su unión es el conjunto $\{1, 2, \dots, 2021\}$ y $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto. (Olimpiada Iberoamericana 2021 Problema 2).

32. Una *coloración* del conjunto de los enteros mayores o iguales que 1, debe hacerse con la siguiente regla: cada número se colorea de azul o rojo, de manera que la suma de cualesquiera dos números (no necesariamente distintos) del mismo color, sea azul. Determinar todas las *coloraciones* posibles del conjunto de los enteros mayores o iguales a 1, que sigan esta regla. (Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2023 Problema 1).

33. Octavio escribe un entero $n \geq 1$ en una pizarra y luego inicia un proceso en el que en cada paso borra el número entero k escrito en la pizarra y lo reemplaza por uno de los siguientes números, siempre que el resultado sea entero:

$$3k-1, \quad 2k+1, \quad \frac{k}{2}.$$

Demostrar que para todo entero $n \geq 1$, Octavio puede llegar a escribir en la pizarra el número 3^{2023} luego de una cantidad finita de pasos. (Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2023 Problema 2).

34. Se tiene un tablero de tres filas y 2023 columnas. En la primera fila están escritos los números desde 1 hasta 2023, ordenados de menor a mayor. El diablo de los números escribe esos mismos números en las casillas de la segunda fila, pero ordenados a su elección. Después, en cada casilla de la tercera fila escribe la diferencia entre los dos números ya escritos en su misma columna (el mayor menos el menor). Por ejemplo, si en las primeras dos casillas de una columna están los números 21 y 198, en la tercera casilla se escribe $98 - 21 = 177$. Explicar por qué, sin importar cómo haya completado el diablo la segunda fila del tablero, nunca ocurrirá que al multiplicar los 2023 números de la tercera fila el resultado sea impar. (Olimpiada de Mayo 2023, Problema 4).

2 Soluciones

5. [**1**(1) (2020) p. 73] Consideramos todos los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567. ¿Cuántos de ellos son divisibles entre 7? (José Nieto, Olimpiada de mayo 2017, segundo nivel, P4)

Solución de José Nieto (editor).

El conjunto A de los números de 7 dígitos que se obtienen permutando de todas las maneras posibles los dígitos de 1234567 tiene $7! = 5040$ elementos. Dado n en A, sea $f(n)$ el número que se obtiene incrementando en 1 cada dígito de n (por ejemplo $f(5247136) = 6358247$) y sea $g(n)$ el número que resulta al reemplazar el único 8 de $f(n)$ por 1 (es decir que $g(5247136) = 6351247$). Es claro que para cada $n \in A$ los números n, $g(n)$, $g^2(n)$, $\ldots$, $g^6(n)$ que se obtienen aplicando g reiteradamente a n, son todos diferentes (mientras que $g^7(n) = n$), y que A es la unión disjunta de $7!/7 = 6!$ grupos de 7 números de esa forma. Ahora veamos que de esos 7 números uno y sólo uno es divisible entre 7. Primero observemos que $f(n) - n = 1111111 = 7 \cdot 158730 + 1$, y que $g(n) \equiv f(n) \pmod{7}$ (pues $g(n) - f(n)$ es igual a 7 por una potencia de 10). Luego $g(n) \equiv n+1 \pmod{7}$, de donde los números n, $g(n)$, $g^2(n), \ldots, g^6(n)$ nos dan todos los restos posibles módulo 7, y exactamente uno de ellos es múltiplo de 7. Por lo tanto la cantidad de elementos de A divisibles entre 7 es $6! = 720$.

8. [**1**(1) (2020) p. 73] Hay 100 estudiantes tomando un examen. El profesor los llama uno por uno y les hace una sola pregunta: "¿Cuántos de los 100 estudiantes resultarán aprobados al finalizar este examen?". La respuesta del estudiante debe ser un número entero. Una vez oída la respuesta, el profesor de inmediato y públicamente anuncia su veredicto, que puede ser *aprobado* o *aplazado*. Una vez examinados todos los estudiantes, llega un inspector que revisa si algún estudiante fue aplazado pero dijo la respuesta correcta. Si hay al menos un estudiante en esa situación, entonces el profesor es suspendido y todos los estudiantes aprueban el examen. De lo contrario, no se realiza ningún cambio.

   ¿Pueden los estudiantes ponerse de acuerdo en una estrategia que les permita aprobar el examen a todos ellos? (Olimpiada Metropolis, 2019).

   Solución de José Nieto (editor).

   Sí. La estrategia es la siguiente: cada alumno dirá 99 menos la cantidad de aplazados entre los que pasaron antes que él. Si todos son aprobados, listo. Si en cambio hay al menos un aplazado, llamemos Juan al último de ellos. Sea k el número de aplazados entre los que pasaron antes que Juan. Entonces el número total de aplazados es $k+1$, y el de aprobados es $100-(k+1) = 99-k$, que es precisamente el número que dijo Juan si siguió la estrategia. Por lo tanto Juan fue aplazado pero acertó, y por regla todos aprueban.

17. [**2**(1) (2021) p. 83.] En un bosque hay 5 árboles A, B, C, D, E, que se encuentran en ese orden sobre una línea recta. En el punto medio de AB hay una margarita, en el punto medio de BC hay un rosal, en el punto medio de CD hay un jazmín y en el punto medio de DE hay un clavel. La distancia entre A y E es de 28 m; la distancia entre la margarita y el clavel es de 20 m. Calcular la distancia entre el rosal y el jazmín.

   (Olimpiada de Mayo 2021, primer nivel).

   Solución de José Fermín Berríos Piña, Instituto Pedagógico Rural El Mácaro "Luis Fermín", UPEL, Turmero, Estado Aragua, Venezuela.

   Sean A, B, C, D, E los puntos donde se encuentran los árboles y M, R, J y K los puntos donde se encuentran la margarita, el rosal, el jazmín y el clavel, respectivamente. Si $d(X, Y)$ es la distancia en metros entre X e Y, entonces se sabe que $d(A, E) = 28$ y $d(M, K) = 20$. Luego

$$d(A, M) + d(K, E) = d(A, E) - d(M, K) = 28 - 20 = 8.$$

Pero $d(A, M) = d(M, B)$ y $d(D, K) = d(K, E)$, luego $d(A, B) + d(D, E) = 2(d(A, M) + d(K, E)) = 2 \cdot 8 = 16$ y $d(B, D) = d(A, E) - (d(A, B) + d(D, E)) = 216 = 12$. Finalmente

$$d(R, J) = d(R, C) + d(C, R) = \frac{1}{2}d(B, C) + \frac{1}{2}d(C, D) = \frac{1}{2}d(B, D) = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

19. [**2**(1) (2021) p. 84.] En un año que tiene 365 días, ¿cuál es la máxima cantidad de “martes 13” que puede haber?

(Olimpiada de Mayo 2021, primer nivel).

Solución compuesta de las enviadas por Angélica María Martínez, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Maracay, Venezuela, y Oscar Guerrero, Universidad Católica de Maule, Chile.

Los números de días de cada mes, desde Enero a Diciembre, tomados módulo 7 son 3, 0, 3, 2, 3, 2, 3, 3, 2, 3, 2, 3. Si se suman modulo 7 se obtiene 0, 3, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5, 1 que dan los corrimientos del 13 de cada mes respecto al 13 de enero. Se ve entonces que máximo hay tres 13 que caen el mismo dia de la semana, en febrero, marzo y noviembre. Si el 13 de febrero es martes, hay tres martes 13. Además como aparecen todos los residuos del 0 al 6, se ve que como mínimo hay un martes 13 en el año.

Un análisis similar muestra que en los años bisiestos ocurre lo mismo: máximo tres martes 13 y mínimo uno.

23. [**2**(2) (2021) p. 152.] Hallar todas las soluciones enteras del sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 3. \end{aligned}$$

(Propuesto por Martín Andonegui, UPEL, Barquisimeto, Venezuela).

Solución de Martín Andonegui

De ambas ecuaciones se obtiene $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 3^3 - 3 = 24$. Efectuando las operaciones indicadas y reduciendo términos semejantes se llega a:

$$3(x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2) + 6xyz = 24,$$

$$(x+y)(x+z)(y+z)=8.$$

Como $x+y+z=3$, la última ecuación puede escribirse como:

$$(3-x)(3-y)(3-z)=8 \tag{1}$$

Por otro lado

$$(3-x)+(3-y)+(3-z)=9-(x+y+z)=9-3=6. \tag{2}$$

El sistema formado por (1) y (2) reduce el problema a hallar tres números enteros cuyo producto es 8 y cuya suma es 6. Las ternas de soluciones posibles que verifican (1) son (1, 1, 8), $(1,-1,-8)$, $(-1,1,-8)$, $(-1,-1,8)$, (1, 2, 4), $(1,-2,-4)$, $(-1,2,-4)$, $(-1,-2,4)$, (2, 2, 2), $(2,-2,-2)$, $(-2,2,-2)$, $(-2,-2,2)$. De ellas, solo las ternas $(-1,-1,8)$ y (2, 2, 2) verifican (2).

De la terna $(-1,-1,8)$ y debido a la conmutatividad de los términos que aparecen en (1) y (2), se siguen las ternas de soluciones $(x,y,z)=(4,4,-5)$, $(4.-5,4)$ y $(-5,4,4)$. Y de la terna (2, 2, 2) se obtiene $(x,y,z)=(1,1,1)$. En total 4 soluciones.

28. [**3**(1/2) (2022) p. 59.] Dos hermanas son gemelas idénticas, pero una de ellas siempre dice la verdad y la otra siempre miente. Luis se casa con una de ellas, pero no sabe si es la veraz o la mentirosa, Un día se encuentra con una de las hermanas y no es capaz de distinguir, a simple vista, si es o no su esposa. ¿Hay alguna pregunta que le pueda hacer, cuya respuesta sea Sí o No, que le permita determinarlo?

    Solución de Ramón Martínez, Grupo Sumatoria, Venezuela.

    Una pregunta podría ser: "¿Si le pregunto a tu hermana si tu eres mi esposa, me respondería que Sí?" Si la respuesta es Sí, entonces no es su esposa, si por el contrario responde No, se trata de su esposa.

    Una solución que no usa preguntas hipotéticas es: "¿Mi esposa siempre miente?" Si dice No, es su esposa, si dice SÍ, es su cuñada

    Nota del editor: Otras preguntas que funcionan son: "¿Mi esposa es veraz?", "¿Eres mi esposa si y sólo si eres veraz?" "¿Eres mi esposa y eres veraz o no eres mi esposa y eres mentirosa?".

28. [**3**(1/2) (2022) p. 60.] Cada habitante de una isla es o bien *veraz* (y siempre dice la verdad) o bien *mentiroso* (y siempre miente). Un día un lógico llega a un

hotel de la isla y observa que hay tres computadoras para uso de los huéspedes. Entonces se acerca a tres empleados del hotel, nativos de la isla, y le pregunta al primero de ellos si las computadoras tienen conexión a internet. La respuesta es "La computadora 1 no tiene conexión, pero pregúntele a mi compañero que él es veraz". El segundo empleado dice entonces "La computadora 2 tiene conexión y la 3 no tiene". Y el tercer empleado dice "Si el computador 2 tiene conexión entonces .el 1 también la tiene. El computador 3 no tiene conexión". ¿Qué computador tiene conexión a internet?

Solución de Dones Colmenárez, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Barquisimeto, Venezuela.

Sean E1, E2 y E3 los empleados 1, 2 y 3, respectivamente, y sea p_i la proposición " la computadora i tiene conexión a internet". Lo señalado por cada empleado fue:

E1: a) $\sim p_1$, b) E2 es veraz.

E2: $p_2 \wedge \sim p_3$.

E3: a) $p_2 \to p_1$, b) $\sim p_3$.

Consideremos dos casos:

1) Si E1 es veraz, entonces p_1 es falsa y E2 también es veraz, por lo tanto, p_2 es verdadera y p_3 es falsa. Entonces E3 es veraz. Pero $p_2 \to p_1$ es falsa, lo cual contradice que E3 es veraz. Luego, este caso es imposible.

2) Si E1 es mentiroso, entonces E2 también es mentiroso, así $p_2 \wedge \sim p_3$ es falsa. Además p_1 es verdadera y por ende $p_2 \to p_1$ también lo es. Luego E3 es veraz, conllevando a que $\sim p_3$ es verdadera, y como $p_2 \wedge \sim p_3$ es falsa, p_2 debe ser falsa. En conclusión sólo p_1 es verdadera, es decir, sólo la computadora 1 tiene conexión a internet.

José Nieto `jhnieto@gmail.com`

Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

Jorge Tipe `jorgetipe@gmail.com`

Pontificia Universidad Católica del Perú.