Teoría de Conjuntos en la Enseñanza Pre-universitaria y en Competiciones Matemáticas

José Heber Nieto Said

Resumen

En este artículo se examina el lugar que ha ocupado la teoría de conjuntos en la historia de la enseñanza pre-universitaria, desde la época de la reforma de las "matemáticas modernas" hasta nuestros días. Se exponen los conceptos básicos sobre conjuntos y el lenguaje mínimo que un estudiante debería dominar para proseguir estudios universitarios en ciencias, matemática o ingeniería y para participar en competiciones matemáticas.

Palabras y frases clave: conjuntos, matemática moderna, enseñanza pre-universitaria, competiciones matemáticas.

Set Theory in Pre-University Education and in Mathematical Competitions

Abstract

In this paper the place of set theory in the history of pre-university math teaching is examined, since the epoch of "New Math" reforms to the present day. The basic concepts about sets are exposed, as well as the minimum language that a student should know in order to pursue university studies in STEM careers and to participate in mathematical competitions.

Key words and phrases: sets, new math, pre-university education, mathematical competitions.

> *Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.*
>
> (Nadie será capaz de expulsarnos del paraíso que Cantor creó para nosotros.)
>
> David Hilbert, [6]

1 Introducción

El estudio de los conjuntos como objeto de una teoría matemática se inició con Georg Cantor, en las últimas tres décadas del siglo XIX. En esos años se comenzaron a estudiar temas como la comparación de conjuntos infinitos, el principio del buen orden, los números cardinales y ordinales, la hipótesis del continuo, etc. Esa primera etapa, conocida como *teoría intuitiva de conjuntos*, finalizó cuando, a comienzos del siglo XX, se descubrieron paradojas como las de Russell, Cantor y Burali-Forti. Estas paradojas tienen su origen en la admisión de conjuntos "muy grandes", como el conjunto de todos los conjuntos. Para superarlas, se desarrollaron varios sistemas axiomáticos, de los cuales el más estudiado y utilizado actualmente es el de Zermelo-Fraenkel (ZF). La teoría de conjuntos formalizada se convirtió en el sistema fundacional de la matemática moderna. Todos los conceptos matemáticos se definieron en términos de conjuntos, en particular los conceptos de número, función, estructuras algebraicas, geometría, topología, etc.

Nada de lo anterior se reflejó en la enseñanza pre-universitaria antes de la década de los 60 del siglo XX. La enseñanza tradicional de la matemática en los primeros seis años se basaba en la aritmética, básicamente en la realización de operaciones. La enseñanza era memorística: se aprendían las tablas de sumar y multiplicar y los algoritmos para realizar operaciones mediante la ejercitación monótona y repetitiva.También se veían algunos elementos de geometría, especialmente fórmulas para el cálculo de perímetros y áreas de figuras simples. En séptimo y octavo grados se enseñaban algunas nociones de álgebra, luego un poco de geometría euclidiana deductiva, resolución de ecuaciones y trigonometría. Este curriculum, que se mantuvo prácticamente inalterado durante muchísimo tiempo, desde comienzos de la década de los 50 comenzó a generar críticas, sobre todo por su énfasis en la memorización antes que en la comprensión. Además estaba muy alejado del quehacer de los matemáticos y no preparaba bien a los estudiantes que deseaban seguir carreras en ciencias o ingeniería. Esto llevó a profundas reformas que se produjeron durante la década de los 60, conocidas en los Estados Unidos de América como la "Nueva Matemática" (*New Math*) y como "Matemática Moderna" en otros países. Con estas reformas se introdujeron en la enseñanza pre-universitaria temas novedosos como la teoría de conjuntos, los sistemas de numeración en bases diferentes de 10, la aritmética modular o "aritmética del reloj", el álgebra booleana, etc. Lamentablemente en la implementación de esas reformas hubo muchos errores y excesos. Por ejemplo temas pensados para la enseñanza media se introdujeron desde la primaria, donde los maestros no estaban preparados para el cambio. La consecuencia fue que los niños no aprendían los nuevos conceptos y tampoco eran capaces de hacer cálculos aritméticos como antes, hecho grave en una época en la cual aun no existían las calculadoras de bolsillo. Esto provocó una reacción contra las reformas, y aunque ya nunca se regresó a la enseñanza tradicional se suprimieron muchos de los temas nuevos. Pero muchos de esos temas luego se fueron reincorporando poco a poco a la enseñanza.

Un tema muy debatido es si la enseñanza de la matemática debe ser “la misma para todos” o si debe diferenciarse según lo que deseen hacer los estudiantes al terminar el ciclo secundario. En muchos países existe una diferenciación, al menos en los dos últimos años de la secundaria. Pero a pesar de esto el autor ha encontrado a muchos estudiantes deseosos de proseguir carreras en ciencias, matemática o ingeniería, o interesados en participar en competiciones matemáticas pre-universitarias, que no tienen idea de lo que significa $A \cap B$ y no conocen una definición precisa de “función”, aunque sepan calcular derivadas o integrales. Pensando en ellos, en este trabajo se resumen las nociones básicas sobre conjuntos que el autor considera útiles y necesarias para esos estudiantes.

2 Breve historia de las reformas a la enseñanza de la matemática

Durante la década de los 50 del siglo XX comenzaron a elaborarse propuestas para reformar la enseñanza de la matemática pre-universitaria. Estos esfuerzos tuvieron varios orígenes y fueron muy variados, pero en general tendían a acercar la matemática escolar a la matemática académica del siglo XX, ofreciendo una mejor preparación para la matemática universitaria [8].

El lanzamiento del satélite Sputnik en 1957 por la Unión Soviética generó gran preocupación en los Estados Unidos de América y el gobierno realizó una gran inversión para mejorar el nivel de la enseñanza de las ciencias a nivel secundario.

La NSF (*National Science Foundation*) financió el desarrollo de nuevos planes de estudio en Biología, Física, Química y Matemática. En particular el SMSG (*School Mathematics Study Group*), liderado por Edward Begle, recibió millones de dólares para desarrollar nuevos planes de estudio , nuevos textos, realizar talleres para profesores de matemática, etc. Los nuevos textos, escritos por matemáticos profesionales, fueron un gran avance respecto a los textos tradicionales, repletos de errores conceptuales, ambigüedades y tedio. Esto generó una revolución en la enseñanza de la matemática que se conoció como *New Math* (Nueva Matemática). Aunque bajo ese nombre se engloban en realidad diversos proyectos y variados enfoques, todos compartieron algunas características comunes. Entre los “nuevos” contenidos estaban los conjuntos, los sistemas de numeración en diferentes bases, la aritmética modular y las desigualdades. Se hacía énfasis en la comprensión de los conceptos, el descubrimiento y la deducción, más que en la memorización, y en las propiedades de las operaciones algebraicas (conmutatividad, asociatividad, distributividad) más que en el dominio de algoritmos para efectuar cálculos.

Esta renovación tuvo lugar también en otros países. En Francia el grupo Bourbaki tuvo una participación importante, pues los matemáticos veían con preocupación el enorme abismo que había entre lo que ellos hacían y la matemática que se enseñaba antes de llegar a la universidad. En 1966 se iniciaron las reformas dirigidas por una comisión presidida por el prestigioso matemático André Lichnerowicz.

En la Unión Soviética las reformas fueron dirigidas por el gran matemático A. Kolmogorov y fueron más moderadas que en USA o Francia. Por ejemplo la geometría se mantuvo en los programas, aunque dando un rol central al estudio de las transformaciones.

3 Reacción a las reformas

En la década de los 60 del siglo XX la aplicación de las reformas incurrió en muchos errores y excesos. Muchas ideas que originalmente se pensaron para la enseñanza media se filtraron sin embargo a la enseñanza primaria, donde los maestros no estaban preparados para asimilarlas y mucho menos para aplicarlas. Por ejemplo se cuenta que a la pregunta “¿Qué números enteros se hallan comprendidos entre 5 y 8?” la respuesta esperada no era “6 y 7”, sino “La intersección del conjunto de los enteros mayores que 5 con el conjunto de los enteros menores que 8”. Las críticas no tardaron en producirse. En 1962, en un documento preparado por Morris Kline, Lipman Bers, George Polya y Max Schiffer [9] y firmado por otros 60 matemáticos notables (entre ellos Lars Ahlfors, Andre Weil, Garret Birkhoff, Richard Bellman, Richard Courant, H. S. M. Coxeter, etc.) se advierte que las abstracciones no se deben introducir prematuramente sin una base suficiente de hechos concretos y de aplicaciones que las justifiquen, que la intuición y las conjeturas deben preceder a las demostraciones formales, que los estudiantes deben percibir los nexos entre la matemática y las demás ciencias, etc.

Jean Dieudonné, miembro del grupo Bourbaki, arremetió contra la enseñanza tradicional de la geometría, con expresiones como “¡Abajo Euclides!” y “¡Muerte a los triángulos!”. Estas expresiones fueron calificadas de extremistas incluso por otros miembros del grupo Bourbaki. Aunque Dieudonné aclaró que consideraba importante el estudio de la geometría, pero que debía emprenderse por otros métodos (básicamente usando el álgebra lineal) muchos interpretaron sus declaraciones en el sentido de que la geometría debía desaparecer de los programas de enseñanza. En

1970 René Thom, también miembro del grupo Bourbaki, publicó una fuerte crítica a las reformas [19], y en particular argumentó a favor del estudio de la geometría.

Y en 1973 Morris Kline publicó el libro *Why Johnny can't add?* [10] (¿Porqué Juanito no puede sumar?). Este libro, bien escrito y con mucho humor, se convirtió rápidamente en un éxito de ventas. Sin embargo el libro carece de propuestas novedosas para corregir el rumbo de las reformas: las que propone en el último capítulo ya eran conocidas o incluso formaban ya parte del curriculum. A pesar de ello ese libro prácticamente acabó con la era de la *New Math* en los Estados Unidos de América, y luego en otras partes del mundo.

Las críticas ocasionaron una reacción llamada "vuelta a lo básico" (*back to basics* en inglés), es decir a la enseñanza tradicional de la aritmética, porcentajes y algunas fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes. Este movimiento tampoco cuajó, porque el supuesto fracaso de la "matemática moderna" no significaba que la enseñanza tradicional fuese buena. En la década de los 80 del siglo XX muchos consideraron que la reforma había fracasado. Pero el curriculum ya no volvió a ser el de antes de las reformas, aunque tampoco fuese todo lo que los reformistas habían deseado ([7]). Además las reformas tuvieron el efecto de despertar el interés de matemáticos y educadores en el curriculum, como algo que debía ser estudiado, analizado y modificado cuando fuese necesario.

En los Estados Unidos de América, a diferencia de la mayoría de los países, el gobierno no impone un curriculum obligatorio para todas las escuelas del país ([7]). Así, puede haber mucha variación entre un Estado y otro, o incluso entre escuelas de un mismo Estado. Pero hay una organización muy influyente, el NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*, Consejo Nacional de Maestros de Matemática), que realiza eventos y publica revistas y documentos con el objetivo de mejorar la educación matemática.

En 1989 el NCTM publicó un documento controversial (*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, [11]) que hacía énfasis en la comprensión de los conceptos matemáticos y en la resolución de problemas antes que en el aprendizaje memorístico y la ejercitación rutinaria de algoritmos. Fue seguido de [12] en 1991 y [13] en 1995. Durante esos años las discusiones entre partidarios y opositores a las reformas no cesaron, en lo que se dio en llamar las "guerras matemáticas".

En el 2000 apareció [14], documento que se considera más equilibrado y menos controversial que los anteriores. Los nuevos estándares se organizaron alrededor de seis principios (Equidad, Curriculum, Enseñanza, Aprendizaje, Evaluación y Tecnología) y diez ejes, que incluyen cinco áreas temáticas (Números y operaciones, Álgebra, Geometría, Medidas, Análisis de Datos y Probabilidad) y cinco procesos (Resolución de Problemas, Razonamiento y Demostración, Comunicación, Conexiones, y Representación). En el 2006, NCTM publicó *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics* [15], donde identifican lo que creen ser los tópicos matemáticos más importantes en cada grado, incluyendo las ideas relacionadas, conceptos, habilidades y procedimientos. Este documento fue usado para los *Common Core State Standards* de 2010, que buscaron establecer estándares educacionales consistentes en matemática y lenguaje.

4 Algunas reflexiones sobre la situación actual

En la actualidad el contenido detallado de la enseñanza pre-universitaria de la matemática varía mucho de país en país. En general se reconoce la importancia de la resolución de problemas, de la comprensión conceptual de los temas y de la importancia de la indagación por parte de los estudiantes, aunque en muchas partes la mala formación de los profesores no permite desarrollar estos principios satisfactoriamente. Los algoritmos tradicionales de la aritmética se siguen enseñando y practicando, aunque ya no tengan el rol central y casi exclusiva que que era usual antes de las reformas. Los avances tecnológicos han mostrado que muchos conocimientos fácticos se vuelven rápidamente obsoletos, y que la cualidad más valiosa en un ingeniero, científico o tecnólogo es la capacidad para enfrentar y resolver problemas nuevos y adaptarse rápidamente a los cambios.

Muchos de los temas introducidos por las reformas y que luego fueron abandonados a causa de las críticas, han recobrado su importancia. Por ejemplo los sistemas de numeración en bases diferentes de 10 fueron considerados por muchos críticos de las reformas como "inútiles" y una "pérdida de tiempo", pero muy pronto se hizo evidente que el sistema binario (y en menor medida el occtal y el hexadecimal) eran fundamentales para entender el funcionamiento de los computadores digitales, y para el diseño de sus circuitos electrónicos. Algo similar ocurrió luego con la aritmética modular o "aritmética del reloj", considerada a lo sumo un juego sin aplicaciones importantes, pero que hoy en día es la base de los sistemas criptográficos que permiten la transmisión segura de datos por internet y las transacciones bancarias remotas.

La ciencia de la computación también ha puesto en primer plano a la matemática discreta (combinatoria, teoría de grafos, etc.) cuyos principios básicos se enseñan en muchas partes antes de la universidad.

El tema que corrió con peor suerte es la teoría de conjuntos, que parece ser considerada por muchos como el símbolo y la raíz de todos los males y falencias de la reforma, y hasta se evita mencionar la palabra "conjunto" como si fuera tabú. Esto nos parece un grave error, por las siguientes razones:

1) La teoría de conjuntos es el sistema fundacional de la matemática moderna.

Todos los conceptos matemáticos se definen de manera precisa en términos de conjuntos. Evitar los conjuntos conduce a definiciones imprecisas, circunloquios y conceptos mal comprendidos. Un ejemplo de esto es el concepto de función. Para evitar la definición conjuntista mediante pares ordenados muchos las definen como cierto tipo de "correspondencias". Pero el concepto de correspondencia queda indefinido. Otras veces se habla de "máquinas" que aceptan una entrada y producen una salida. Esta es una buena metáfora que puede reforzar la comprensión intuitiva de lo que es una función, pero como definición es vaga e imprecisa y a un estudiante acucioso puede generarle dudas como las siguientes: ¿qué es exactamente una "máquina"? ¿qué ocurre con las entradas una vez que son procesadas por la máquina, son destruidas o salen por algún lado?, etc.

2) Los conceptos de la Combinatoria, Teoría de Grafos y otras ramas de la Matemática Discreta solo se pueden estudiar en el contexto de la teoría de Conjuntos.

3) En Probabilidad y Estadística los conjuntos son indispensables para hablar con precisión de conceptos como "espacio muestral" o "suceso". En algunos textos de Probabilidad y Esradística se llega al absurdo de dar circunloquios para evitar mencionar los conjuntos. Por ejemplo se define el espacio muestral como una "lista" de los resultados posibles de un experimento, caracterización que es aceptable para espacios muestrales finitos, pero totalmente inapropiada para los infinitos (¿cómo se hace una lista de los números reales entre 0 y 1?) Y en vez de definir los sucesos como subconjuntos del espacio muestral se describen de manera imprecisa como "eventos".

4) Los conjuntos son uno de los tipos de datos básicos en los modernos lenguajes de programación. Por ejemplo en Python, lenguaje con el cual actualmente muchos jóvenes pre-universitarios se inician en la programación, se pueden definir conjuntos por extensión y realizar las operaciones de unión e intersección. Veamos como se pueden definir dos conjuntos y preguntar a Python por su unión e intersección:

```
>>> A = {2,5,7}
>>> B = {1,2,3,5,8}
>>> A | B
{1, 2, 3, 5, 7, 8}
>>> A & B
{2, 5}
```

Aquí se definen dos conjuntos $A = \{2, 5, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 5, 8\}$. El operador '|' realiza la unión, y el operador '&' la intersección.

5) La teoría de conjuntos está estrechamente relacionada con la Lógica.

6) En las competiciones matemáticas los conceptos básicos y el lenguaje de la teoría de conjuntos se usan libremente (vea ejemplos en la sección 7).

Por las razones anteriores, sin entrar en la discusión de si *todos* los estudiantes de enseñanza media deben aprender algo de teoría de conjuntos, creemos que esto es imprescindible al menos para los estudiantes que piensen seguir carreras en matemática, computación, ciencias o ingeniería, o estén interesados en participar en competiciones matemáticas pre-universitarias Pensando en ellos, en la sección siguiente se resumen las nociones básicas sobre conjuntos que el autor considera útiles y necesarias para esos estudiantes.

5 Nociones básicas de la teoría de conjuntos

El concepto de *conjunto* es tan básico no es posible dar una definición precisa del mismo sin usar palabras como colección o agrupación, que no son sino sinónimos de la palabra conjunto. En las teorías axiomáticas *conjunto* es un término primitivo, que no se define, sino que se caracteriza por los axiomas que satisface. Sin embargo en una aproximación intuitiva es suficiente la idea de que un *conjunto* es una colección de objetos de cualquier naturaleza, a los cuales se les llama *elementos* del conjunto.

5.1 Pertenencia e inclusión

La *pertenencia* de un elemento x a un conjunto A se indica escribiendo $x \in A$, que se lee "x pertenece a A". Esta es una de las relaciones básicas de la teoría de conjuntos..

Para indicar que x *no pertenece* a A se escribe $x \notin A$, "x no pertenece a A".

Un conjunto finito se puede describir *por extensión*, enumerando sus elementos, los cuales se colocan entre llaves y separados por comas. Por ejemplo $\{2, 3, 5, 7\}$ denota el conjunto cuyos elementos son 2, 3, 5 y 7.

También se puede definir *por comprensión*, enunciando una propiedad que caracterice a los elementos del conjunto. Por ejemplo

$$\{x : x \text{ es un número primo menor que } 10\}$$

es otra manera de definir el mismo conjunto anterior $\{2, 3, 5, 7\}$ (en este tipo de definiciones en vez de ':' también se suele usar '|').

Las definiciones por comprensión son muy poderosas, ya que permiten definir conjuntos finitos o infinitos. Por ejemplo $\{x : x \text{ es un número primo}\}$ es el conjunto de *todos* los números primos, que es infinito. Pero el uso de estas definiciones por extensión condujo a la aparición de contradicciones. Una de las más famosas es la *paradoja de Russell*, que se produce al considerar la clase $A = \{x : x \notin x\}$. Si nos preguntamos si A es o no un elemento de sí mismo, ocurre lo siguiente: si $A \in A$

entonces A no satisface la condición para pertenecer a A, y por lo tanto $A \notin A$; si en cambio $A \notin A$; entonces A satisface la condición para pertenecer a A, y por lo tanto $A \in A$. Esta y otras paradojas, como las de Cantor, Burali-Forti, etc., tienen su origen en la admisión de conjuntos "demasiado grandes", como el conjunto de todos los conjuntos. Para superarlas, a comienzos del siglo XX se abandonó la llamada *teoría intuitiva de conjuntos* y se desarrollaron varios sistemas axiomáticos, de los cuales el más estudiado y utilizado actualmente es el de Zermelo-Fraenkel (ZF), o bien Zermelo-Fraenkel con el axioma de elección (ZFC). En estos sistemas no se pueden definir conjuntos por comprensión con condiciones arbitrarias; sin embargo se admiten definiciones del tipo $\{x \in B : P(x)\}$ donde B es un conjunto previamente aceptado. Además se emplean varios axiomas para garantizar la existencia de ciertos conjuntos (como las uniones, los conjuntos potencia, etc.) Aquí no desarrollaremos una teoría axiomática sino que nos limitaremos a exponer los conceptos básicos de la teoría intuitiva de conjuntos, pero advirtiendo cuando sea necesario qué operaciones y definiciones son admisibles.

Se dice que un conjunto A está *contenido* en otro conjunto B, si todo elemento de A es también elemento de B. En este caso se escribe $A \subset B$, o bien $A \subseteq B$. Ejemplo: $\{2, 5, 7\} \subset \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$. Si $A \subset B$ también se dice que B *contiene* a A, y se escribe $B \supset A$ o bien $B \supseteq A$.

Observe que para cualquier conjunto A se cumple $A \subset A$.

Dos conjuntos A y B son *iguales*, y se escribe $A = B$, si tienen exactamente los mismos elementos, es decir si $x \in A$ si y solamente si $x \in B$. Esto equivale a que se cumplan simultáneamente $A \subset B$ y $B \subset A$. De esta definición de igualdad se desprende que el orden en que se escriben los elementos de un conjunto definido por extensión no tiene ninguna importancia: $\{3, 7, 2, 5\}$ es exactamente el mismo conjunto que $\{2, 3, 5, 7\}$.

Dos conjuntos A y B son *diferentes* si no son iguales, y en ese caso se escribe $A \neq B$. Observe que esto ocurre si y sólo si existe un elemento que pertenece a uno de los dos conjuntos pero no al otro.

Si $A \subset B$ pero $A \neq B$, se dice que A es un subconjunto *propio* de B, y se escribe $A \subsetneqq B$.

Ejercicio 1. Pruebe que si $A \subset B$ y $B \subset C$ entonces $A \subset C$.

5.2 El conjunto vacío

Hay un conjunto especial que no tiene ningún elemento. Se llama *conjunto vacío* y se denota con el símbolo $\varnothing$. Observe que el conjunto vacío es único. En efecto, si hubiese dos conjuntos vacíos diferentes, entonces debería existir un elemento perteneciente a uno de ellos y no al otro, lo cual es imposible pues ninguno de ellos tiene elemento alguno.

El .conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto, es decir $\varnothing \subset A$ para todo conjunto A. Para demostrarlo debemos ver que si $x \in \varnothing$ entonces $x \in A$. Pero este condicional es verdadero pues el antecedente $x \in \varnothing$ es siempre falso (recuerde que el condicional "si p entonces q" es verdadero excepto en el caso en que p sea verdadero y q falso). Otra forma de verlo: si no fuese cierto que $\varnothing \subset A$, entonces debería existir un elemento de $\varnothing$ no perteneciente a A. Pero eso es imposible pues $\varnothing$ no tiene ningún elemento. Este tipo de pruebas por absurdo es común cuando se trata con el conjunto vacío.

Ejercicio 2. El conjunto $\{\varnothing\}$, ¿es vacío o no?

5.3 Operaciones con conjuntos

La *unión* de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cup B$ cuyos elementos son los que pertenecen a al menos uno de los conjuntos A y B. Por ejemplo si $A = \{2,5,7\}$ y $B = \{1,2,3,5,8\}$. entonces $A \cup B = \{1,2,3,5,7,8\}$.

Ejercicio 3. Pruebe las siguientes propiedades de la unión:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \quad \text{(propiedad conmutativa)} \\ (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \quad \text{(propiedad asociativa)} \\ A \cup \varnothing &= A \quad (\varnothing \text{ es neutro para la unión}) \\ A \cup A &= A \quad \text{(idempotencia)} \end{aligned}$$

La *intersección* de dos conjuntos A y B es el conjunto $A \cap B$ cuyos elementos son los que pertenecen tanto a A como a B. En otras palabras

$$A \cap B = \{x \in A : x \in B\}.$$

Por ejemplo si $A = \{2,5,7\}$ y $B = \{1,2,3,5,8\}$. entonces $A \cap B = \{2,5\}$.

Ejercicio 4. Pruebe las siguientes propiedades de la intersección:

$$\begin{aligned} A \cap B &= B \cap A \quad \text{(propiedad conmutativa)} \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \quad \text{(propiedad asociativa)} \\ A \cap \varnothing &= \varnothing \\ A \cap A &= A \quad \text{(idempotencia)} \end{aligned}$$

Además hay dos propiedades importantes que vinculan la unión con la intersección, a saber las *propiedades distributivas*:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Observe que a diferencia de lo que ocurre en la aritmética, donde el producto se distribuye sobre la suma ($(a + b)c = ac + bc$) pero no al revés, aquí cada operación se distribuye sobre la otra, de manera simétrica. Por eso hay dos leyes distributivas y no una sola. Veamos por ejemplo como se demuestra la primera de estas leyes, es decir $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Supongamos que $x \in (A \cup B) \cap C$. Entonces $x \in (A \cup B)$ y $x \in C$. Como $x \in A \cup B$ debe cumplirse $x \in A$ o $x \in B$. En el primer caso x pertenece tanto a A como a C, luego $x \in A \cap C$ y por lo tanto $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. En el segundo caso x pertenece tanto a B como a C, luego $x \in B \cap C$ y por lo tanto $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Así hemos demostrado que $(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Para probar la inclusión en el otro sentido sea $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Entonces $x \in (A \cap C)$ o $x \in (B \cap C)$. En el primer caso x pertenece tanto a A como a C, luego $x \in A \cup B$ y $x \in C$, por lo tanto a $(A \cup B) \cap C$. En el segundo caso x pertenece tanto a B como a C, luego $x \in A \cup B$ y $x \in C$, por lo tanto $x \in (A \cap B) \cap C$. Así hemos probado que también $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$, y por lo tanto $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Ejercicio 5. Pruebe las *leyes de absorción* $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$.

La unión y la intersección pueden definirse para familias arbitrarias de conjuntos, no solo para dos. Así, si $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos, entonces

$$\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = \{x : x \in X \text{ para algún } X \in \mathcal{F}\},$$

$$\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X = \{x : x \in X \text{ para todo } X \in \mathcal{F}\}.$$

Dos conjuntos A y B se dice que son *disjuntos* si $A \cap B = \varnothing$.

Una *partición* de un conjunto A es una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos no vacíos de A, tales que dos cualesquiera de ellos sean disjuntos y además $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = A$. Por ejemplo $\{\{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6, 8\}, \{7\}\}$ es una partición de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. A los miembros de una partición se les suele llamar *bloques*.

Ejercicio 6. Enumere todas las particiones del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

Otra operación importante es la *diferencia* de dos conjuntos, que se define así:

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}.$$

Ejemplo: si $A = \{2,5,6,7\}$ y $B = \{1,2,3,6,8\}$. entonces $A \setminus B = \{5,7\}$ y $B \setminus A = \{1,3,8\}$.

Ejercicio 7. Pruebe que
1) $A \setminus B = \varnothing$ si y solo si $A \subset B$.
2) $A \setminus B = A$ si y solo si $A \cap B = \varnothing$.
3) $A \setminus B$ y B son disjuntos y su unión es $A \cup B$.

Otra operación importante es la *diferencia simétrica*, que se puede definir así:

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Los elementos de $A \oplus B$ son los que están en A pero no en B y los que están en B pero no en A. La diferencia entre $A \oplus B$ y $A \cup B$ es que $A \oplus B$ no contiene a los elementos que están tanto en A como en B, es decir a los elementos de $A \cap B$, mientras que $A \cup B$ sí los contiene. Por lo tanto se cumple que

$$A \oplus B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)).$$

Otras propiedades de la diferencia simétrica:

$$\begin{aligned} A \oplus B = B \oplus A \quad &\text{(propiedad conmutativa)} \\ (A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \quad &\text{(propiedad asociativa)} \\ A \oplus \varnothing = A \quad &(\varnothing \text{ es neutro para } \oplus) \\ A \oplus A = \varnothing & \end{aligned}$$

Una manera de probar la propiedad asociativa de $\oplus$ es ver que un elemento está en el $(A \oplus B) \oplus C$ si y sólo si está o bien en los tres conjuntos A, B y C, o bien en uno solo de ellos. Y lo mismo vale para $A \oplus (B \oplus C)$.

Si bien la idea de un conjunto que “contenga a todo” es contradictoria, en muchos casos hay un conjunto U que contiene a todos los objetos que interesan en un determinado asunto. A ese conjunto se le llama *universo del discurso*. En este caso, si $A \subset U$ entonces al conjunto diferencia $U \setminus A$ se le llama *complemento* de A en U.

El complemento de un conjunto A se suele denotar A' (esta notación es potencialmente ambigua, pues depende de U, pero se usa en contextos en los cuales está claro cuál es el universo del discurso U),

Ejercicio 8. Pruebe las siguientes propiedades del complemento:
1) $\varnothing' = U$, $U' = \varnothing$.
2) $A'' = A$.
3) $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $\quad (A \cap B)' = A' \cup B'$ (leyes de De Morgan)

5.4 Diagramas de Venn

Los *diagramas de Venn* son una manera de representar conjuntos gráficamente, de manera de visualizar relaciones entre ellos. Para ello cada conjunto se representa mediante un círculo o un óvalo. Si hay un universo del discurso, éste se representa mediante un rectángulo que contiene en su interior a los demás conjuntos.

Veamos a continuación como se representan los conjuntos disjuntos, la inclusión, unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento.

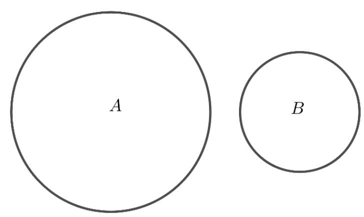


Figura 1: Conjuntos disjuntos

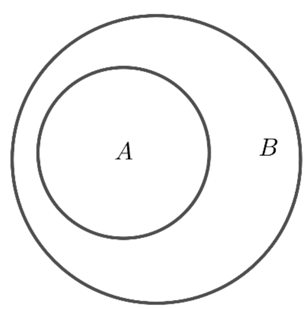


Figura 2: $A \subset B$

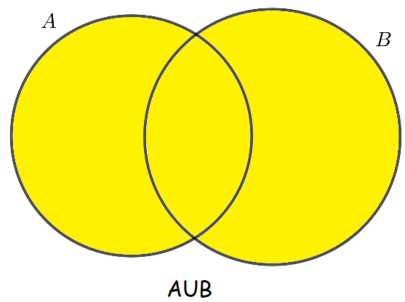


Figura 3: Unión

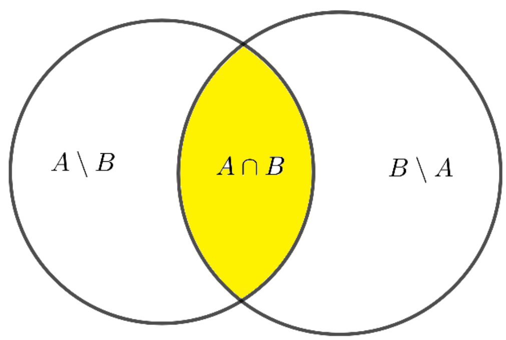


Figura 4: Intersección y diferencias

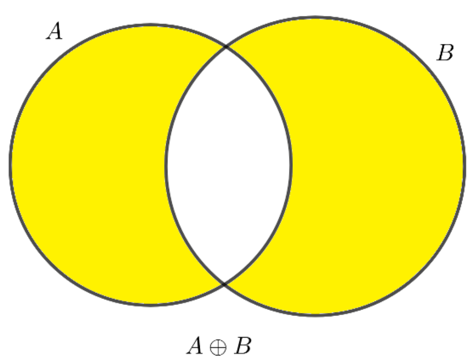


Figura 5: Diferencia simétrica

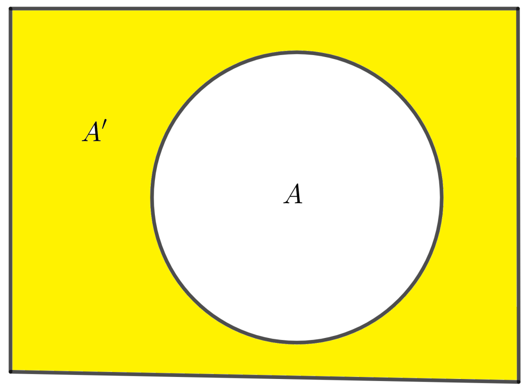


Figura 6: Complemento

5.5 Pares ordenados

Recordemos que entre los elementos de un conjunto no hay ningún orden preestablecido. Así por ejemplo $\{1, 2\}$ y $\{2, 1\}$ son exactamente el mismo conjunto. Pero en muchas ocasiones se desea distinguir un primer elemento de un segundo, es decir formar un *par ordenado*. La notación estándar para designar un par ordenado con primer elemento a y segundo elemento b es (a, b). Claro que uno podría preguntarse qué es (a, b), más allá de un recurso notacional. La teoría de conjuntos da una solución a este problema, que aunque puede parecer artificiosa es efectiva: (a, b). se define como el conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. Veamos que esta definición cumple la condición esencial que se exige a los pares ordenados, a saber, que

$(a, b) = (c, d)$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.

El 'si' es obvio, demostraremos el 'solo si'. Observemos en primer lugar que a podría ser igual a b. En ese caso $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$ que es un conjunto *unitario* (es decir con un único elemento). Ahora si $(a, a) = (c, d)$ entonces $(c, d) = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ también debe ser unitario, o sea que $\{c\} = \{c, d\}$. Entonces $d \in \{c, d\} = \{c\}$, de donde $d = c$ y como $\{\{a\}\} = (a, a) = (c, c) = \{\{c\}\}$ se sigue que $\{a\} = \{c\}$ y entonces $a = c$. Y por supuesto $b = a = c = d$. Ahora supongamos que $(a, b) = (c, d)$ y que $a \neq b$. Entonces $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ y $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ tienen un único elemento unitario cada uno, por taanto $\{a\} = \{c\}$ y $a = c$. Y también tienen un único elemento cada uno que no es unitario, por tanto $\{a, b\} = \{c, d\}$, es decir $\{a, b\} = \{a, d\}$. Luego $b \in \{a, d\}$, y como $b \neq a$ debe ser $b = d$.

5.6 Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B, al conjunto de todos los pares ordenados con su primer elemento en A y el segundo en B se le llama *producto cartesiano* de A y B, y se denota $A \times B$. Es decir:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ejemplo: si $A = \{2, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. entonces

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}.$$

El nombre "producto cartesiano" por supuesto hace referencia a René Descartes, creador de la *Geometría analítica* en la cual cada punto del plano se identifica por sus coordenadas (x, y) respecto a un par de ejes ortogonales. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces el conjunto de los puntos del plano geométrico se puede identificar con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. que usualmente se denota como $\mathbb{R}^2$.

Al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de un conjunto A se le llama *conjunto potencia* de A, y lo denotaremos $\mathcal{P}(A)$. Por ejemplo si $A = \{1, 2, 3\}$ entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

5.7 Relaciones

En el lenguaje común una *relación* es una conexión o correspondencia entre una cosa y otra. Por ejemplo se habla de la amistad como una relación entre personas, de la relación entre un hijo y su madre, y en aritmética de la relación de "ser mayor que" entre números reales o de la relación "ser múltiplo de" entre números enteros. Como se ve esta noción de relación es bastante vaga, pero desde el punto de vista matemático no interesa saber cuál es la naturaleza de una relación sino simplemente cuáles son los pares de elementos que están relacionados. Por ejemplo si en una reunión están Ana, Berta, Carlos, Daniel, Elena y Francisco y se sabe que Berta es la esposa de Francisco, que Elena es la esposa de Carlos y que Ana y Daniel no están casados, entonces la relación "es la esposa de" queda caracterizada por los pares (Berta, Francisco) y (Elena, Carlos). Esto motiva la siguiente definición: si A y B son conjuntos, entonces

Una *relación binaria* de A en B es un subconjunto de $A \times B$.

Si R es una relación, para indicar que un par (a, b) pertenece a R se suele usar, en vez de $(a, b) \in R$, la notación más compacta aRb.

Algunos ejemplos triviales de relaciones binarias de A en B son:

- La relación *vacía* $\emptyset$, en la cual ningún par de elementos está relacionado.

- La relación *total* $A \times B$, en la cual todo elemento de A está relacionado con todo elemento de B.

- La relación *identidad* de un conjunto A en sí mismo, en la cual cada elemento de A está relacionado con sí mismo y con ningún otro. O sea:

$$I_A = \{(a, a) : a \in A\}.$$

Si R es una relación de A en B, la *inversa* R^{-1} es una relación de B en A definida como $R^{-1} = \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in R\}$. En otras palabras, $bR^{-1}a$ si y solo si aRb.

Por ejemplo si R es la relación “es hijo de” en el conjunto de los hombres, entonces R^{-1} es la relación “es padre de”.

Si R es una relación de A en B y S es una relación de B en C, la *composición* SR es la relación definida así: $aSRc$ si y solo si existe $b \in B$ tal que aRb y bSc.

Ejemplo: si en el conjunto de los hombres R es la relación “es hijo de” y S es la relación “es hermano de”, entonces SR es la relación “es sobrino de” y $R^{-1}S$ es la relación “es tío de”.

Ejercicio 9. Verifique que $(SR)^{-1} = R^{-1}S^{-1}$.

5.8 Funciones

Las funciones son un tipo particular de relaciones. Si A y B son conjuntos, una *función* de A en B es una relación f de A en B tal que, para cada $a \in A$ existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Ese único elemento b relacionado con a se acostumbra denotarlo $f(a)$. Es decir que si f es una función entonces $(a, b) \in f$, $a\, f\, b$ y $b = f(a)$ significan exactamente lo mismo, pero se prefiere la última de las tres.

Algunos prefieren llamar *gráfica* de la función al conjunto de pares ordenados, reservando la palabra “función” para la “correspondencia” que asigna a cada elemento $a \in A$ el elemento $f(a) \in B$. Sin embargo esto nos deja la duda de qué es exactamente una correspondencia.

La notación $f : A \to B$ se usa para indicar que f es una función de A en B.

Ejemplos: Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B\{3, 4, 5\}$. Entonces $\{(1, 4), (3, 5)\}$ es una relación de A en B pero no es función pues no contiene ningún par con primer componente 2; $\{(1, 4), (2, 3), (1, 5), (3, 3)\}$ tampoco es función pues contiene dos pares diferentes con primera componente 1; $f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 3)\}$ sí es función y se puede caracterizar así: $f(1) = 4$, $f(2) = 4$, $f(3) = 3$.

Para cualquier conjunto A la relación I_A (identidad en A) es una función.

Si $f : A \to B$ entonces a A se le llama *dominio* de f y a B se le llama *codominio*. El conjunto de valores tomados por f, es decir $\{b \in B : b = f(a) \text{ para algún } a \in A\}$ se llama *rango* o *recorrido* de f.

Cuando el dominio y el condominio de una función son conjuntos numéricos, la función se suele caracterizar mediante una expresión algebraica. Por ejemplo $f(x) = x^2 + x + 1$ define una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que como conjunto de pares ordenados sería $f = \{(x, x^2 + x + 1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathbb{R}\}$.

$f : A \to B$ es *inyectiva* o *uno a uno* si a elementos diferentes de A le corresponden elementos diferentes de B, o sea si $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$. Esto es equivalente a decir que $f(x) = f(y)$ implica $x = y$.

$f : A \to B$ es *sobreyectiva* o más sencillamente *sobre*, si dado cualquier $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Esto equivale a decir que el codominio y el rango de f coinciden.

$f : A \to B$ es *bieyectiva* si es tanto inyectiva como sobre. En ese caso también se dice que f es una *bieyección*.

Ejemplos: La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x$ es inyectiva, pero no es sobre pues su rango son los reales positivos. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^3 - 2x$ es sobre, pero no es inyectiva pues $g(0) = g(\sqrt{2}) = 0$. La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = x + 3$ es biyectiva.

Observe que si $f : A \to B$ es una función, entonces considerada como relación tiene una inversa f^{-1}, pero esa relación inversa puede no ser función. La condición necesaria y suficiente para que f^{-1} sea función es que f sea biyectiva.

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son dos funciones, entonces la *composición* de ambas es la función $g \circ f : A \to C$ definida así:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \text{para todo } x \in A$$

Es fácil ver que la composición es asociativa, es decir que si $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ son tres funciones, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Si $f : A \to B$ es biyectiva y tiene inversa f^{-1} entonces $f^{-1} \circ f = I_A$, la identidad en A, y $f \circ f^{-1} = I_B$, la identidad en B.

Ejercicio 10. Pruebe que

1. La composicion de dos funciones inyectivas es inyectiva.

2. La composicion de dos funciones sobreyectivas es sobreyectiva..

3. $f : A \to B$ es inyectiva si y solo si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$.

4. $f : A \to B$ es sobre si y solo si existe $g : B \to A$ tal que $f \circ g = I_B$.

5. Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son binyectivas entonces la composicion $g \circ f$ es biyectiva y se cumple que

$$.(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

5.9 Números naturales

Aunque desde la primera infancia aprendemos a contar, no es tan fácil decir *qué son* los números. Podemos decir que un conjunto A tiene un solo elemento si (1) existe $a \in A$, y (2) si $x \in A$ entonces $x = a$. Y podemos decir que A tiene *dos* elementos si (1) existen $a \in A$ y $b \in A$, con $a \neq b$, y (2) si $x \in A$ entonces $x = a$ o $x = b$. Pero esto no es lo mismo que decir *qué son* los números 1 y 2. Una propuesta para definir el 2 es que es "la propiedad común a todos los conjuntos que tienen dos elementos". Pero esto tiene como inconveniente lo vago del término "propiedad", y también la posibilidad de que los conjuntos con dos elementos tengan alguna otra propiedad común aparte de la que nos interesa. Una alternativa fue propuesta por Gottlob Frege (1848–1925) , precursor de la lógica matemática moderna y de la filosofía analítica. Para Frege, el número 2 puede identificarse con la clase de todos los conjuntos que tienen dos elementos. Frege desarrolló su teoría de la aritmética en [4], pero Bertrand Russell encontró en ella un defecto, que ilustró con la llamada *paradoja de Russell*, a la cual ya nos hemos referido. El problema se origina al referirse a *clases* que son demasiado grandes para poder ser consideradas conjuntos. Russell elaboró una salida a esto mediante su *teoría de los tipos*. Pero otra forma de resolver el problema consiste en definir el 2 como *un conjunto particular* con dos elementos. Esto puede hacerse de muchas maneras, lo cual introduce un componente de arbitrariedad en la definición de los números. Sin embargo hay una manera bastante natural y conveniente de hacerlo, la llamada *definición de von Neumann* de los numeros naturales, que se expone a continuación.

Comencemos por definir el 0 como $\varnothing$, el conjunto vacío. El 1 se define como $\{0\}$, o sea $\{\varnothing\}$, que no es vacío sino que tiene un único elemento. Continuamos definiendo el 2 como $\{0, 1\}$, es decir como $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, que contiene dos elementos: $\varnothing$ y $\{\varnothing\}$.

Este procedimiento se puede continuar como se muestra a continuación:.

$$\begin{aligned}
&0 = \varnothing \\
&1 = \{0\} \\
&2 = \{0, 1\} \\
&3 = \{0, 1, 2\} \\
&4 = \{0, 1, 2, 3\} \\
&5 = \{0, 1, 2, 3, 4\} \\
&6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\
&7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}
\end{aligned}$$

Observemos que si ya se ha definido el número n, entonces el siguiente a n, que denotaremos n^+, se define como

$$n^+ = n \cup \{n\}.$$

Se puede probar que los conjuntos generados de este modo son todos diferentes, y que n^+ tiene exactamente un elemento más que n.

El conjunto de los *números naturales* definidos de este modo se suele denotar con el símbolo ω. También se suele usar $\mathbb{N}$, aunque a veces $\mathbb{N}$ se usa para denotar a los naturales sin el 0.

A partir de esta definición se puede desarrollar la aritmética. El lector interesado puede consultar los detalles en [5].

6 Conjuntos finitos y número de elementos

Si A es un conjunto y existe una biyección entre A y algún número n, entonces se dice que A es *finito* y que tiene n elementos, lo cual se denota así: $|A| = n$ (Otra notación en uso es $\#A = n$).

Es inmediato ver que si existe una biyección entre A y B y uno de ellos es finito, entonces el otro también y $|A| = |B|$.

Si A y B son conjuntos finitos disjuntos es claro que $|A \cup B| = |A| + |B|$. En general se cumple:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Esto se puede justificar así: en la suma $|A| + |B|$ los elementos comunes a A y B están contados dos veces, por lo tanto es necesario restar $|A \cap B|$ para tener el número de elementos de $A \cup B$. Otra prueba se obtiene observando que $A \cup B$ es la unión disjunta de A y $B \setminus A$, luego (1) $|A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$. Además B es la unión disjunta de $A \cap B$ y $B \setminus A$, luego (2) $|B| = |A \cup B| + |B \setminus A|$. Restando (2) de (1) resulta $|A \cup B| - |B| = |A| - |A \cap B|$, es decir $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Para tres conjuntos finitos A, B y C se cumple:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

En $|A| + |B| + |C|$ cada elemento de $|A \cup B \cup C|$ está contado una, dos o tres veces según el número de conjuntos (A, B y C) a los que pertenezca. Al restar las intersecciones de a dos, los elementos que pertenecen a dos de los tres conjuntos quedan bien contados, pero los que pertenecen a los tres quedan sin contar. Eso se corrige sumando $|A \cap B \cap C|$.

Estos resultados se pueden generalizar a n conjuntos finitos A_1, A_2,..., A_n. Sean $S_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$, $S_2 = \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$,
$S_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|, \ldots, S_n = |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$. Entonces:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n.$$

La identidad anterior se conoce como *principio de inclusiones y exclusiones*. Las sumas parciales de la derecha son alternadamente mayores o iguales y menores o iguales que el miembro izquierdo, es decir:

$$\begin{aligned} S_1 - S_2 + \cdots + S_r &\ge |A| \quad \text{si } r \text{ es impar}, \\ S_1 - S_2 + \cdots - S_r &\le |A| \quad \text{si } r \text{ es par}. \end{aligned}$$

Estas desigualdades se conocen como *desigualdades de Bonferroni*.

Para productos cartesianos de conjuntos finitos se tiene:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Esto es claro pues cada elemento de A puede ser el primer elemento de $|B|$ pares ordenados. luego $A \times B$ tiene $|A|$ veces $|B|$ pares ordenados.

Para contar las funciones de A en B observamos que para cada elemento $a \in A$, su imagen $f(a)$ se puede escoger de $|B|$ maneras, luego el número de funciones es el producto $|B| \cdot |B| \cdots |B|$ con $|A|$ factores, es decir $|B|^{|A|}$. Este es el motivo por el cual el conjunto de todas las funciones de A en B se denota B^A, así se cumple que

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}.$$

Para contar las funciones inyectivas de un conjunto finito A en otro B, supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Entonces para definir una función inyectiva $f : A \to B$ podemos escoger $f(a_1)$ de n maneras (como cualquiera de los elementos $b_1, b_2, \ldots, b_n$). Pero $f(a_2)$ debe ser diferente de $f(a_1)$, por lo tanto solo se puede elegir de $n-1$ maneras. Y $f(a_3)$ debe ser diferente de $f(a_1)$ y $f(a_2)$, por lo tanto solo se puede elegir de $n-2$ maneras. Continuando de esta modo resulta que el número de funciones inyectivas $f : A \to B$ es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, número que se suele denotar $n^{\underline{k}}$ y se le llama *subfactorial*.

Si $k = 0$, es decir si $A = \varnothing$, entonces $A \times B = \varnothing \times B = \varnothing$. Pero en este caso hay exactamente una función de A en B, a saber la función vacía. Esto puede parecer raro, pero si una función es un conjunto de pares ordenados, ese conjunto puede ser vacío. Claro que esto solo puede ocurrir si el dominio de la función es vacío. Y la función vacía es inyectiva: en efecto, la proposición "si $x, y \in A$ y $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$" es verdadera, pues el antecedente "si $x, y \in A$ y $f(x) = f(y)$" siempre es falso. Otra manera de verlo : para afirmar que una función $f : A \to B$ no es inyectiva, habría que encontrar dos elementos diferentes $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$, y esto no es posible si A es vacío. Por esta razón se adopta la convención $n^{\underline{0}} = 1$.

Si $|A| = |B| = n$ entonces $f : A \to B$ es inyectiva si y solo si es sobre y si y solo si es biyectiva. En efecto, si f es inyectiva entonces las imágenes de los elementos de A son todas diferentes, por lo tanto son n, que es el número de elementos de B, luego todo elemento de B es imagen de algún elemento de A y f es sobre. Recíprocamente, si f es sobre entonces las imágenes de los elementos de A son n (pues son todos los elementos de B), luego son todas diferentes y f es inyectiva. Aplicando lo anterior vemos que el número de biyecciones de un conjunto de n elementos en otro de igual número de elementos es $n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$, número que se acostumbra denotar $n!$ y se llama *factorial* de n.

A cada subconjunto B de un conjunto finito A se le puede asociar una función $f_B : A \to \{0, 1\}$ definida así:

$$f_B(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in B, \\ 0 \text{ si } x \notin B \end{cases}$$

A f_B se le llama *función característica* del conjunto B. Es fácil ver que la función que a cada $B \subset A$ le hace corresponder f_B es una biyección de $\mathcal{P}(A)$ en $\{0, 1\}^A$. Por lo tanto

$$|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A| = 2^{|A|}.$$

Si A es un conjunto con n elementos y se desea contar los subconjuntos de A que tienen exactamente k elementos, se puede proceder así: las funciones inyectivas de k

ISSN: 2711–1792 (En línea) • Espacio Matemático Vol. 4 No. 1/2 (2023), pp. 26–59

en A son $n^{\underline{k}}$. Los rangos de estas funciones son todos los subconjuntos de A con k elementos, pero cada uno de ellos aparece repetido $k!$ veces. Por lo tanto hay $n^{\underline{k}}/k!$ de esos subconjuntos. A ese número se le denota $\binom{n}{k}$, es decir:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

A los números $\binom{n}{k}$ se les llama *coeficientes binomiales*, pues aparecen en el desarrollo de la potencia de un binomio $(x+y)^n$. En efecto, $(x+y)^n$ es el producto de n factores $(x+y)$, y cada término del desarrollo de $(x+y)^n$ es un producto que se forma escogiendo o bien x o bien y en cada uno de los n factores $(x+y)$. Si se escoge x en k factores entonces se debe escoger y en los restantes $n-k$ factores, y así se forma el producto $x^k y^{n-k}$. Pero ese mismo producto se forma cualesquiera que sean los k factores $(x+y)$.en los cuales se escoge x, es decir que $x^k y^{n-k}$ aparece $\binom{n}{k}$ veces. Se tiene así la fórmula siguiente, conocida como *Teorema del binomio de Newton*:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Una *permutación* de un conjunto A es una biyección de A en A. El conjunto de las permutaciones de A se denota $S(A)$. Si $|A| = n$ entonces $|S(A)| = n!$. Si $A = \varnothing$ entonces hay exactamente una permutación de A, a saber la función vacía $\varnothing$. Por esta razón se conviene en definir $0! = 1$.

Si σ es una permutación de A se dice que $x \in A$ es un *punto fijo* de σ si $\sigma(x) = x$. Una permutación de dice que es un *desarreglo* si no tiene ningún punto fijo.

El número D_n de desarreglos de $\{1, 2, \ldots, n\}$ se puede determinar usando el principio de inclusiones y exclusiones. En efecto, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ llamemos A_i al conjunto de las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que dejan fijo al número i. Es claro que $|A_i| = (n-1)!$, puesto que A_i se puede identificar con las permutaciones de los $n-1$ números de 1 a n que son diferentes de i. Si $1 \leq i < j \leq n$ la intersección $A_i \cap A_j$ consta de las permutaciones que dejan fijos tanto a i como a j, las cuales son $(n-2)!$. Análogamente si $1 \leq i < j < k \leq n$ entonces $|A_i \cap A_j \cap A_k| = (n-3)!$, y así sucesivamente. Ahora bien, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ son las permutaciones que dejan algún punto fijo, es decir las que *no son* desarreglos. Por lo tanto el número de desarreglos es

$$D_n = n! - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|.$$

Pero $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|$ se puede calcular usando el principio de inclusiones y exclusiones:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\
&= \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

Los primeros valores de D_n son $D_0 = 1$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$, $D_3 =$, $D_4 = 9$, $D_5 = 44$.

Nota: En lugar de D_n también se suele usar la notación $!n$.

Ejercicio 11. Pruebe que el número de desarreglos de n elementos D_n satisface las relaciones de recurrencia siguientes:

a) $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.

b) $D_n = (-1)^{n-1} + nD_{n-1}$.

El número de funciones sobreyectivas $S(n,k)$ de un conjunto A con n elementos en otro conjunto B con k elementos se puede calcular usando el principio de inclusiones y exclusiones, y se obtiene la fórmula:

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n$$

(para los detalles vea [16], problema 6.7 pág. 44). Por ejemplo

$$S(4,3) = \sum_{j=0}^{2} (-1)^j \binom{3}{j} (3-j)^4 = 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4 = 81 - 48 + 3 = 36.$$

Las funciones sobreyectivas de A en B están relacionadas con las particiones de A en k clases. En efecto, si $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, a cada $f : A \to B$ sobreyectiva se le puede asociar la partición $P_f = \{f^{-1}(b_1), f^{-1}(b_2), \ldots, f^{-1}(b_k)\}$, donde $f^{-1}(b_i) = \{x \in A : f(x) = b_i\}$. Recíprocamente, para cada partición $Q = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ de A en k bloques se puede definir una función $f : A \to B$ sobreyectiva y tal que $P_f = Q$. Para ello sea $\sigma : \{1, 2, \ldots, k\} \to B$ una permutación de los elementos de B, y para cada $x \in A$, si $x \in A_i$, definamos $f(x) = b_{\sigma(i)}$. De esta manera se pueden obtener $k!$ funciones sobreyectivas $f : A \to B$ tales que $P_f = Q$. Esto prueba que el número de particiones de A en k clases es $\frac{1}{k!}S(n,k)$. A estos números se los conoce como *números de Stirling de segunda clase* y se denotan $\left\{ {n \atop k} \right\}$, es decir que

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!}S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\binom{k}{j}(k-j)^n.$$

6.1 Conjuntos infinitos

Si un conjunto no es finito entonces se dice que es *infinito*. El ejemplo más sencillo de conjunto infinito es el conjunto $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ de los números naturales. Si existe una biyección $f : \omega \to A$ de ω en un conjunto A entonces se dice que A es *infinito numerable*.

Ejemplo: el conjunto de los números pares $A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ es infinito numerable. En efecto, la función $f : \omega \to A$ definida por $f(n) = 2n$ es claramente una biyección.

Ejercicio 11. Pruebe que el conjunto de los números enteros (positivos, negativos y 0) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ es infinito numerable.

Cantor probó que el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es infinito numerable. Para ello veamos primero como se pueden enumerar los racionales positivos. Hagamos una tabla infinita colocando en la primera fila todas las fracciones positivas con denominador 1, es decir 1/1, 2/1, 3/1,.... En la segunda fila colocamos todas las fracciones positivas con denominador 2, es decir 1/2, 2/2, 3/2,..., y así sucesivamente.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

En esa tabla aparecen todos los números racionales positivos, aunque aparecen repetidos (por ejemplo 1/2, 2/4, 3/6 etc. son el mismo número). Pero para cada racional positivo hay una única fracción reducida en la tabla (con el numerador y el denominador coprimos). Ahora numeramos los elementos de la tabla siguiendo diagonales ascendentes e ignorando las fracciones que no sean reducidas.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & & & & & \\
 & \nearrow & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & & & & & & & &
\end{array}
$$

Así los primeros términos de esta numeración son 1, 1/2, 2, 1/3, 3, 1/4, 2/3, 3/2, 4, 1/5, 5, 1/6,...

Esto prueba que los números racionales positivos son infinitos numerables.

Ejercicio 12. Pruebe que el conjunto $\mathbb{Q}$ de todos los números racionales (positivos, negativos y 0) es infinito numerable.

Cantor probó también que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales *no es* numerable. Para ello desarrolló un método que ha resultado muy útil en varias ramas de la matemática, llamado *método diagonal de Cantor*. Veamos como mediante este método se puede probar que los reales del intervalo $[0, 1]$ no son numerables. Recordemos que todo número real tiene una expresión decimal. En realidad algunos reales tienen dos, por ejemplo 0,5 y 0,49999... son iguales, así como 1 y 0,9999... En estos casos escogeremos la expresión que termina en infinitos nueves. Entonces cada número real en $[0, 1]$ tiene una única expresión de la forma $0, a_1a_2a_3\ldots$ que no termina en infinitos ceros. Si estos números fuesen numerables, se podrían ordenar en una lista:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}\ldots \\
r_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}\ldots \\
r_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}\ldots \\
r_4 &= 0, a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Escojamos ahora, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$, un dígito b_i que sea diferente de a_{ii} y de 0, y consideremos el número $x = 0, b_1b_2b_3b_4\ldots$. Entonces x no termina en infinitos ceros, luego debería estar en la lista. Pero para cualquier $i = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene $x \neq r_i$ pues $b_i \neq a_{ii}$, es decir, x y r_i difieren en el i-simo dígito decimal. O sea que x no está en la lista, contradicción. Por lo tanto $[0, 1]$ no es numerable (y por lo tanto, con mayor razón, $\mathbb{R}$ no es numerable).

Hay muchos otros resultados interesantes sobre conjuntos infinitos, muchos de los cuales fueron investigados por el propio Cantor, entre ellos la teoría de los números cardinales y ordinales. El lector interesado puede consultar [5].

7 Conjuntos en las competiciones matemáticas.

A continuación veremos algunos ejemplos representativos de problemas propuestos en competiciones matemáticas pre-universitarias, en los cuales se utilizan conceptos de la teoría de conjuntos.

Problema 1. (Fase autonómica de la Comunidad Valenciana de la XIX Olimpiada Matemática Española, 2008) ¿Cuántos números naturales de 1 a 1000 no son divisibles ni por 3 ni por 7 ni por 11?

Solución: Sean A, B, C los conjuntos de números naturales de 1 a 1000 divisibles entre 3, 7 u 11, respectivamente. Entonces $|A| = \lfloor 1000/3 \rfloor = 333$, $|B| = \lfloor 1000/7 \rfloor = 142$, $|C| = \lfloor 1000/11 \rfloor = 90$. Los elementos de $A \cap B$ son los números naturales de 1 a 1000 que son divisibles entre $3 \cdot 7 = 21$ Por lo tanto $|A \cap B| = \lfloor 1000/21 \rfloor = 47$. Análogamente $|A \cap C| = \lfloor 1000/33 \rfloor = 30$, $|B \cap C| = \lfloor 1000/77 \rfloor = 12$ y $|A \cap B \cap C| = \lfloor 1000/231 \rfloor = 4$. Luego por el principio de inclusiones y exclusiones

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= 333 + 142 + 90 - 47 - 30 - 12 + 4 = 480. \end{aligned}$$

Es decir que hay 480 números que son divisibles por al menos uno de los tres números 3, 7 y 11. Por lo tanto los que no son divisibles por ninguno de los tres son $1000 - 480 = 520$.

Problema 2. (Canguro 2020, nivel Student, problema 25) En la mañana una heladería ofrece 16 sabores de helado. Ana escoge un helado con dos sabores de los 16. En la tarde algunos sabores se agotaron y Berta escoge un helado con tres sabores de los que quedaron. Si Ana y Berta tuvieron la misma cantidad de opciones para formar su helado, ¿cuántos sabores se agotaron?

Solución: Ana tuvo $\binom{16}{2} = 16 \cdot 15/2 = 120$ maneras de escoger su helado y Berta tuvo $\binom{n}{3}$, donde n es el número de sabores disponibles en la tarde. Luego $n(n-1)(n-2)/6 = 120$, de donde $n(n-1)(n-2) = 720$ y $n = 10$, es decir que se agotaron $16 - 10 = 6$ sabores.

Problema 3. (Olimpiada Centroamericana y del Caribe 1999, problema 6) Sea S un subconjunto de $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$ con la propiedad de que ninguna suma de dos elementos diferentes en S esté en S. Encuentre el número máximo de elementos que puede tener S.

Solución: Sea S un conjunto que satisface la condición del problema y sea m su mayor elemento. Si m es impar, el conjunto $\{1, 2, \dots, m-1\}$ puede partirse en pares $\{x, m-x\}$, con $1 \le x \le (m-1)/2$, cada uno de los cuales puede contener a lo sumo un elemento de S. Por lo tanto $|S| \le (m-1)/2 + 1 \le 499 + 1 = 500$. Análogamente si m es par, $\{1, 2, \dots, m-1\}$ se parte en los pares $\{x, m-x\}$, con $1 \le x \le m/2 - 1$, y el conjunto unitario $\{m/2\}$. En este caso $|S| \le (m/2-1)+1+1 = m/2+1 \le 501$. Como el conjunto $\{500, 501, \dots, 1000\}$ tiene la propiedad pedida, el máximo buscado es 501. De hecho, $\{500, 501, \dots, 1000\}$ es el único conjunto con la propiedad pedida y 501 elementos.

Problema 4. (Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2015, problema 6) En una olimpiada de matemáticas participaron 39 alumnos. El examen consistió en 6 problemas y cada uno se calificó con 1 punto si estaba correcto o con 0 si estaba incorrecto. Para cualesquiera tres alumnos, hay a lo más un problema que no fue resuelto por ninguno de los tres. Sea B la suma de los puntos que obtuvieron los 39 alumnos. Encuentre el menor valor posible para B.

Solución: Sea A_i el conjunto de estudiantes que no resolvieron el problema i. La condición equivale a decir que $|A_i \cap A_j| \le 2$ para todos los $1 \le i, j \le 6$. Como $B = 39 \cdot 6 - \sum |A_i|$, minimizar B es lo mismo que maximizar $\sum |A_i|$. Por el principio de inclusiones y exclusiones y las desigualdades de Bonferroni se tiene

$$\begin{aligned} 39 \ge |\cup A_i| &= \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \cdots \ge \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| \\ &\ge \sum |A_i| - \binom{6}{2} \cdot 2. \end{aligned}$$

Luego $\sum |A_i| \le 39 + 30 = 69$ y $B = 39 \cdot 6 - \sum |A_i| \ge 234 - 69 = 165$.

Veamos ahora que efectivamente se pueden lograr 165 puntos. Sea P el conjunto de los 6 problemas. Para cada subconjunto $Q \subset P$ con $|Q| = 4$, tomemos 2 estudiantes que resolvieron, cada uno, los problemas en Q y ningún otro. Como hay $\binom{6}{4} = 15$ subconjuntos Q eso nos da 30 estudiantes. Digamos que cada uno de los 8 estudiantes restantes resolvió 5 problemas. Esta configuración cumple la condición del problema y el total de puntos es $30 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 165$.

En conclusión el menor valor posible para B es 165.

Problema 5. (IMO 2003, problema 1) Sea A un subconjunto de 101 elementos del conjunto $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$. Pruebe que existen números t_1, t_2,..., t_{100} en S

tales que los conjuntos $A_j = \{x + t_j : x \in A\}$, $j = 1, 2, \ldots, 100$, son disjuntos dos a dos

Solución: Considere el conjunto $D = \{x - y : x, y \in A\}$. El número de elementos de D es $\leq 101 \cdot 100 + 1$. Es claro que $(A + t_i) \cap (A + t_j) = \varnothing$ si y solo si $t_i - t_j \notin D$. Ahora escogeremos inductivamente los 100 elementos t_1, $t_2, \ldots$, t_{100}. Como $|S| > |D|$, se tiene que $S \setminus D \neq \varnothing$ y tomamos como t_1 cualquier elemento de $S \setminus D$. Supongamos que ya hemos escogido t_1, $t_2, \ldots$, t_k ($1 \leq k \leq 99$) en S tales que la diferencia de dos cualesquiera de ellos no está en D. Entonces cada uno de los conjuntos $t_1 + D$, $t_2 + D, \ldots$, $t_k + D$ tiene a lo sumo $101 \cdot 100 + 1$ elementos y su unión tiene a lo sumo $99(101 \cdot 100 + 1) = 999999 < 1000000$ elementos. Por lo tanto podemos escoger t_{k+1} en S que no pertenezca a ningún $t_i + D$ ($1 \leq i \leq k$).

Problema 6. (Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2007, problema 3) Sea S un conjunto finito de números enteros. Suponga que para cualquier par de elementos p, q de S, con $p \neq q$, hay elementos a, b, c de S, no necesariamente diferentes entre sí, con $a \neq 0$, de manera que el polinomio $F(x) = ax^2 + bx + c$ cumple que $F(p) = F(q) = 0$. Determine el máximo número de elementos que puede tener el conjunto S.

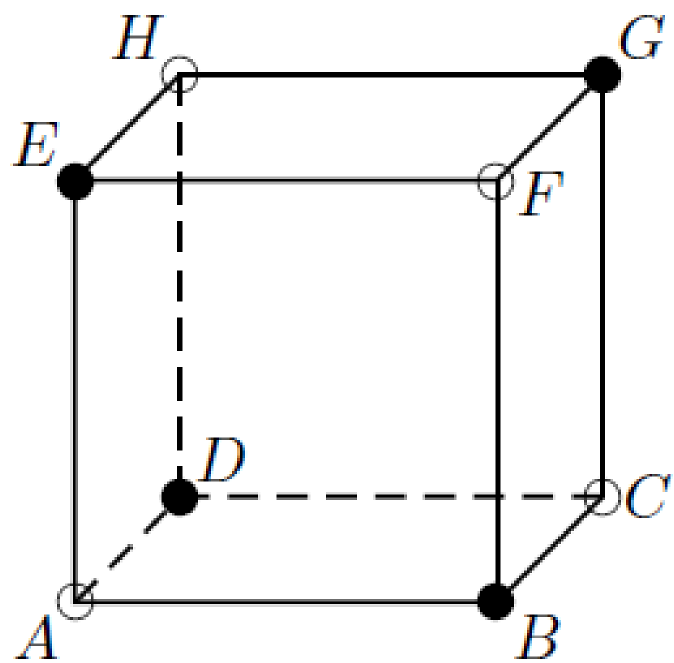
Solución: El máximo número de elementos que puede tener S es tres. En primer lugar, observemos que el conjunto de tres elementos $S = \{-1, 0, 1\}$ tiene la propiedad pedida. En efecto, el polinomio $1x^2 + 0x + (-1)$ tiene coeficientes en S y raíces -1 y 1; el polinomio $1x^2 + (-1)x + 0$ tiene coeficientes en S raíces 0 y 1; el polinomio $1x^2 + 1x + 0$ tiene coeficientes en S y raíces -1 y 0.

En segundo lugar, mostraremos que S no puede tener más de tres elementos.

Supóngase que S tenga al menos dos elementos con valor absoluto mayor que 1, y sean p, q los dos elementos con mayor valor absoluto en S (con $|p| \geq |q|$). Según las condiciones del problema, existen $A, B, C \in S$, con $A \neq 0$, tales que el polinomio $Ax^2 + Bx + C$ tiene raíces p y q. Pero por las fórmulas de Vieta debe cumplirse que $Apq = C$, de donde $|C| = |A||p||q| \geq 2|p| > |p|$, absurdo. O sea que a lo sumo podría haber un elemento en S con valor absoluto mayor que 1, de donde la mayor cantidad de elementos que podría tener el conjunto sería cuatro, siendo éstos -1, 0, 1 y n para algún n entero con $|n| > 1$. Si $n > 0$, el coeficiente del término lineal en el polinomio que tenga raíces 1 y n debe tener valor absoluto mayor o igual que $n+1$, absurdo. Lo mismo ocurre si $n < 0$, considerando el coeficiente del término lineal en el polinomio con raíces -1 y n. De esta forma, no es posible que S tenga cuatro elementos. Se concluye que el máximo posible es tres elementos.

Problema 7. (Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2011/1) En cada uno de los vértices de un cubo hay una mosca. Al sonar un silbato, cada una de las moscas vuela a alguno de los vértices del cubo situado en una misma cara que el vértice de donde partió, pero diagonalmente opuesto a éste. Al sonar el silbato, ¿de cuántas maneras pueden volar las moscas de modo que en ningún vértice queden dos o más moscas?

Solución: Observemos primero que los vértices del cubo se pueden particionar en dos conjuntos disjuntos $\{A, C, F, H\}$ y $\{B, D, E, G\}$, tales que cada mosca puede volar solamente a vértices pertenecientes al mismo conjunto del vértice en el cual se encuentra.



Por lo tanto basta calcular el número de maneras en que pueden volar las moscas ubicadas en cada conjunto y luego multiplicar. Las maneras en que pueden volar las moscas ubicadas en A, C, F y H son los *desarreglos* de $\{A, C, F, H\}$, es decir el número de permutaciones de 4 elementos sin puntos fijos, cuyo valor es $D_4 = \frac{4!}{2!} - \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{4!} = 12 - 4 + 1 = 9$. Luego la respuesta al problema es $9 \times 9 = 81$.

Problema 8. (Olimpiada Iberoamericana 2021 Problema 5). Dado un conjunto finito C, definimos $S(C)$ como la suma de los elementos de C. Encuentre dos conjuntos A y B tales que su intersección es vacía, su unión es el conjunto $\{1, 2, \ldots, 2021\}$ y $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto.

Solución: Primero observamos que debe ser

$$S(A)+S(B)=1+2+\cdots+2021=\frac{2021\cdot 2022}{2}=3\cdot 43\cdot 47\cdot 337.$$

Como $S(A)S(B)$ es un cuadrado perfecto, entonces existen enteros positivos a, b, c tales que $S(A)=a^2c$ y $S(B)=b^2c$. Por lo tanto,

$$(a^2+b^2)c=S(A)+S(B)=3\cdot 43\cdot 47\cdot 337.$$

Los primos 3, 43 y 47 son de la forma $4k+3$, por lo que no pueden expresarse como suma de cuadrados. El primo 337 es de la forma $4k+1$ y se expresa como suma de cuadrados de forma única como $337=81+256=9^2+16^2$. Por lo tanto tomando $a=9$ y $b=16$ resulta $c=3\cdot 43\cdot 47=3\cdot 2021$. Busquemos conjuntos A y B tales que $S(A)=81\cdot 3\cdot 2021$ y $S(B)=256\cdot 3\cdot 2021$. Podemos agrupar los números $\{1,2,\ldots,2021\}$ de la siguiente forma:

$$\{2021\},\{1,2020\},\{2,2019\},\cdots,\{1010,1011\}.$$

La suma de los elementos de cualquiera de estos 1011 conjuntos es 2021. Como A podemos tomar la unión de cualesquiera $3\cdot 81=243$ de esos conjuntos, y como B la unión de los restantes $768=3\cdot 256$.

Veamos a continuación algunos otros problemas propuestos en la IMO, solamente para mostrar como el lenguaje y los conceptos básicos de la teoría de conjuntos aparecen en estas competiciones. Las soluciones pueden verse en [3] o en [2] .

Problema 9. (IMO 1974 lista corta) Sea $g(k)$ el número de particiones de un conjunto M con k elementos, es decir el número de familias $\{A_1,A_2,\ldots,A_s\}$ de subconjuntos no vacíos de M tales que $A_i\cap A_j=\varnothing$ para $i\neq j$ y $\cup_{i=1}^{n}A_i=M$. Probar que

$$n^n\leq g(2n)\leq(2n)^{2n}\quad \text{para todo } n.$$

Problema 10. (IMO 1981/2) Sea $f(n,r)$ la media aritmética de los mínimos de todos los subconjuntos de l r elementos del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$. Probar que $f(n,r)=\frac{n+1}{r+1}$.

Problema 11. (IMO 1987/1) Sea S un conjunto con n elementos. Sea $p_n(k)$.el número de permutaciones de S que tienen exactamente k puntos fijos. Probar que

$$\sum_{k=0}^{n}kp_n(k)=n!.$$

Problema 12. (IMO 1989/1) Probar que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ se puede expresar como la unión disjunta de 17 subconjuntos A_1, A_2,. . . , A_{17} tales que:

(i) cada A_i contiene el mismo número de elementos,

(ii) la suma de todos los elementos de cada A_i es la misma para $i = 1, 2, \ldots, 17$.

Problema 13. (IMO 1989/2) Considere las permutacions $(x_1, \ldots, x_{2n})$ del conjunto $\{1, \ldots, 2n\}$ tales que $|x_i - x_{i+1}| = n$ para al menos un $i \in \{1, \ldots, 2n-1\}$. Para cada número natural n, determine si las permutaciones con esta propiedad son más o menos numerosas que las restantes permutaciones de $\{1, \ldots, 2n\}$.

Problema 14. (IMO, 1991/3) Sea $S = \{1, 2, \ldots, 280\}$. Encuentre el menor número natural n tal que para cualquier subconjunto de S con n elementos, el subconjunto contiene 5 números que son primos relativos por pares.

Problema 15. (IMO 1994/6) Halle un conjunto A de enteros positivos tal que para cualquier conjunto infinito P de números primos existan enteros positivos $m \in A$ y $n \notin A$ que sean, ambos, el producto del mismo número (al menos dos) de elementos diferentes de P.

Problema 16. (IMO 2010/3) Sea N el conjunto de los enteros positivos. Determine todas las funciones $g : N \to N$ tales que $(g(m) + n)(m + g(n))$ es un cuadrado perfecto para todo $m, n \in N$.

Problema 17. (IMO 2016/4) Un conjunto de números enteros positivos se llama *fragante* si contiene al menos dos elementos, y cada uno de sus elementos tiene algún factor primo en común con al menos uno de los elementos restantes. Sea $P(n) = n^2 + n + 1$. Determinar el menor número entero positivo b para el cual existe algún número entero no negativo a tal que el conjunto

$$\{P(a + 1), P(a + 2), \ldots, P(a + b)\}$$

es fragante.

Problema 18. (IMO 2021/6) Sean $m \geq 2$ un entero, A un conjunto finito de enteros (no necesariamente positivos), y B_1, B_2, B_3,. . . , B_m subconjuntos de A. Suponemos que para cada $k = 1, 2, \ldots, m$, la suma de los elementos de B_k es m^k. Probar que A contiene al menos $m/2$ elementos.

8 Conclusiones

Es recomendable que el lenguaje y los conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos sean conocidos por todos los estudiantes de enseñanza media, como pretendieron los reformadores del curriculum hace más de sesenta años, dado que la matemática moderna se fundamenta en los conjuntos y todos los conceptos matemáticos se definen de manera precisa en términos de conjuntos. Pero en el caso de los estudiantes que piensen seguir carreras en matemática, computación, ciencias, ingeniería, o estén interesados en participar en competiciones matemáticas pre-universitarias, estos conocimientos son imprescindibles.

Referencias

[1] Common Core State Standards Initiative, *Standards for Mathematics*, `https://corestandards.org/mathematics-standards/`

[2] Djukic, D. et al., *The IMO Compendium*, Springer, 2006.

[3] IMO 2012 shortlist, `https://www.imo-official.org/problems.aspx`

[4] Frege, G., *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau, 1884.

[5] Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, Princeton (1960), reprinted by Springer-Verlag, New York (1974). Hay traducción: *Teoría Intuitiva de Conjuntos*, C.E.C.S.A, México (1965).

[6] Hilbert, D., *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen, **95**(1) , 161–190 (1926).

[7] Kilpatrick, J., *School Mathematics: A Bipolar Subject*, chapter 2 of Shimizu, Y., Vithal, R. (eds.) *Mathematics Curriculum Reforms Around the World*, The 24th ICMI Study, 2023.

[8] Kilpatrick, J., *The new math as an international phenomenon*, ZDM Mathematics Education 44, 563–571 (2012).

[9] Kline, M., Bers, L. et al, *On the mathematics curriculum of the high school*, The Mathematics Teacher, Vol. 55 No. 3 (1962), pp. 191–195.

[10] Kline, M. *Why Johnny can't add? The Failure of the New Math*. St. Martin's Press, 1973.

[11] *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*, NCTM, 1989

[12] *Professional Standards for Teaching Mathematics*, NCTM, 1991.

[13] *Assessment Standards for School Mathematics*, NCTM, 1995.

[14] *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, 2000.

[15] *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics*, NCTM, 2006.

[16] Nieto, J. H., *Combinatoria para olimpiadas matemáticas*, AVCM, Caracas, 2014. `https://acmfiles.s3.amazonaws.com/Libros/Combinatoria-JHNieto-final.pdf`.

[17] Phillips, C. J., *The new math: A political history*, The University of Chicago Press (2015).

[18] Raimi, R. A., *Whatever Happened to the New Math?*,

[19] Thom, R., *Les mathématiques modernes: une erreur pédagogique et philosophique?*, L'Age de la Science, vol. III, 1970, 225–242.

José Nieto (jhnieto@gmail.com)
Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.