

# Rango de tolerancia en la solución de las integrales generadas por el Método de los Momentos (MM) al ser aplicado a la solución de antenas de conductores rectos y finos

Range of the tolerance in the solution of integrals for the Moment Method (MM) during the computes of thin antennas of straight wires

Ángel Villalón Duany<sup>1</sup>, Zulema Sánchez Vera<sup>2</sup>, Lienys Lombardía Legrá<sup>3</sup>, Héctor Ramón Sánchez Paz<sup>4</sup>



## ABSTRACT

Taking advantage of the excellent opportunities offered by the professional MATLAB software; an analysis of the solution of integrals generated by the Method of Moments in conjunction with the method of the Adapted Points and their influence on the final outcome of the simulation of thin antennas of straight and electrically short conductives is made. It was taken into consideration the recommendation to use a basis function or polynomial of simple expansion and organized in power series of few terms in the case of thin symmetrical dipoles and electrically short antennas, and also some recommendations are made.

**Keywords:** antenna, integrals, thin symmetrical dipole, moment method.

## RESUMEN

Aprovechando las excelentes posibilidades que ofrece el software profesional MATLAB; se realiza un análisis sobre la solución de integrales generadas por el método de los Momentos en conjunto con el método de los Puntos Adaptados y su influencia en el resultado final de la simulación de antenas finas de conductores rectos y eléctricamente corto. Se empleó la recomendación de usar una función base o polinomio de expansión simple y organizada en series de potencias de muy pocos términos en el caso de dipolos simétricos finos y antenas eléctricamente cortas, y se realizan algunas recomendaciones.

**Palabras clave:** antena, integrales, dipolo simétrico fino, método de los momentos.

Fecha de recepción: 2015-02-13 - Fecha aceptado: 2015-06-09

<sup>1</sup> Telecomunicaciones, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba, angelv@fie.uo.edu.cu, Ingeniero

<sup>2</sup> Informática, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba, zulema@fie.uo.edu.cu, Licenciada

<sup>3</sup> Informática, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba, lienys@fie.uo.edu.cu, Ingeniera

<sup>4</sup> Telecomunicaciones, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, Cuba, hsanchezpaz@fie.uo.edu.cu, Dr.C.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la literatura especializada, se reconoce que la antena Dipolo Simétrica formada por un conductor recto, fino y corto ( $a \ll l$  y  $a \ll \lambda$ ) es una de las antenas más simples, Fig. 1.

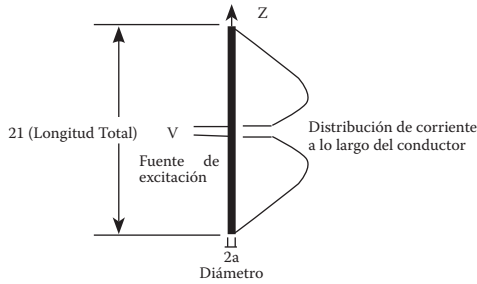


Figura 1. Antena Dipolo Simétrico fina y corta.

Para modelar esta estructura se recurre a la ecuación integral de Hallen o a la ecuación integro-diferencial de Pocklington de la referencia [1]. En este trabajo se empleará solo la primera, la cual aparece representada en (1).

$$\int_{-l}^l I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{r} dz' = c \cos kz - j \frac{V}{60} \sin k|z| \quad (1)$$

Dónde:  $r = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$ ,  $k$  es la constante de propagación,  $c$  es una contante de integración,  $V$  es la fuera electromotriz de alimentación e  $I_z(z')$  es la distribución de corriente a lo largo de la antena.

La ecuación (1) es un modelo matemático muy empleado para calcular la distribución de corriente y con ello, las características de radiación e impedancia. A pesar de la sencillez de la antena, es difícil encontrar una solución analítica exacta, ya que la distribución de corriente  $I_z(z)$  es precisamente la incógnita que se requiere conocer, pero que al estar dentro del signo integral hace falta conocerla previamente para obtener dicha solución. No obstante a lo anterior, existen algunas herramientas de elementos finitos, que posibilitan el cálculo de la distribución de corriente  $I_z(z)$  con una excelente aproximación, lo que permite resolver el llamado problema interno de dicha antena y con ella calcular sus parámetros eléctricos.

Para proceder al cálculo de dicha distribución de corriente  $I_z(z)$  a lo largo de los dos brazos con-

ductores de la antena, es conveniente representarla expandida en una serie de funciones básicas conocidas  $f_p(z)$  con coeficientes constantes complejos  $I_p$  desconocidos y cuyos valores es necesario determinar en cada caso particular. Dichas funciones deben ser linealmente independientes entre sí. En este trabajo se han escogido las funciones polinómicas del yugoslavo Popovich [2] empleando para estos casos coeficientes constantes complejos, organizados en series de potencia de tercer orden ( $P=3$ ), ya que estas son matemáticamente funciones simples con las cuales se puede aproximar la distribución de corriente  $I_z(z)$  a lo largo de los Dipolos Cilíndricos finos y cortos eléctricamente, con muy buena precisión.

En (2) se muestra la distribución de corriente expandida en  $P$  dimensiones.

$$I_z(z) = \sum_{p=1}^P I_p^* f_p(z) \quad (2)$$

Dónde  $P$  orden del polinomio e  $I_p$  los coeficientes constantes complejos.

Los polinomios de Popovich se muestran en (3).

$$I_z(z) = \sum_{p=1}^P I_p^* f_p(z) \quad (3)$$

De modo que la distribución de corriente a lo largo de los dos brazos de la antena empleando los polinomios de Popovich toma la forma representada en (4).

$$I_z(z) = \sum_{p=1}^P \dot{I}_p \left( 1 - \frac{|z|}{l} \right)^p \quad (4)$$

Al sustituir (4) en (1) se obtiene la llamada ecuación de Hallen expandida, mostrada en (5).

$$\sum_{p=1}^P \dot{I}_p \int_{-l}^l \left( 1 - \frac{|z|}{l} \right)^p \frac{e^{-jk\sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} dz' = c \cos kz - j \frac{V}{60} \sin k|z| \quad (5)$$

Dónde:  $r = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$ ,  $k$  es la constante de propagación,  $c$  es una contante de integración,  $P$  los puntos de muestreo,  $V$  es la fuera electromotriz de alimentación y las  $\dot{I}_p$  son los coeficientes constantes complejos.

La ecuación (5) posee las incógnitas  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$  y  $C$ , por lo que se tiene una ecuación funcional con  $P$  incógnitas, la cual es necesario transformar-

la en un sistema algebraico de P ecuaciones con P incógnitas linealmente independientes, para lo cual se ha escogido uno de los métodos numéricos más empleados o sea el método de los Momentos [3] debido a sus grandes ventajas computacionales.

Para obtener el sistema de ecuaciones algebraicas linealmente independiente, a su vez se escogieron como funciones de prueba las funciones Delta de Dirac, lo que se conoce en su conjunto como método de los Momentos en unión de la técnica especial de los Puntos Adaptados, estas funciones se muestran en (6).

$$w_n(z) = \delta(z - z_n) \quad (6)$$

Dónde:  $n = 1, 2, \dots, N$  y  $\delta(z - z_n)$  son las funciones Delta de Dirac.

Como se ha expuesto, la solución aproximada de la ecuación integral de Hallen por el método de los Momentos conlleva dos aspectos: las funciones básicas o de expansión  $f_p(z)$  y las funciones de prueba o de muestreo  $w_n(z)$ , las cuales permiten formar el sistema de ecuaciones linealmente independientes, existiendo infinitas combinaciones posibles para ambas funciones, por lo que estas no pueden escogerse arbitrariamente sin un especial cuidado, ya que aunque la solución exacta es única, el camino escogido influye decisivamente en la complejidad del proceso de cómputo y en la precisión de la solución aproximada obtenida. Por eso aunque su selección es arbitraria, se deben cumplir los siguientes requisitos:

1. Las condiciones de independencia lineal entre ellas (Ortogonalidad).
2. Las condiciones de frontera, que en este caso es  $f_p(z = \pm l) = 0$ .
3. El grado de complejidad de dichas funciones, pues esta influye directamente en el carácter del proceso de computación:
  - Tiempo de máquina
  - Capacidad de memoria
  - Precisión de los resultados

En este trabajo se optimiza el tiempo de máquina en función de la precisión de los resultados finales. Para ello se busca un compromiso entre la

mínima precisión necesaria en la evaluación de las integrales en el proceso de cómputo y la precisión final en los resultados de los parámetros de radiación e impedancia deseados.

## 2. DESARROLLO

Los resultados iniciales se obtienen empleando tres Dipolos Simétricos de longitud total  $2l = 0.5\lambda, 0.75\lambda$  y  $1.0\lambda$  con radio  $a = 0.007022l$  y alimentado en el centro con una fuerza electromotriz  $V = 1$  Voltio., Fig.2.

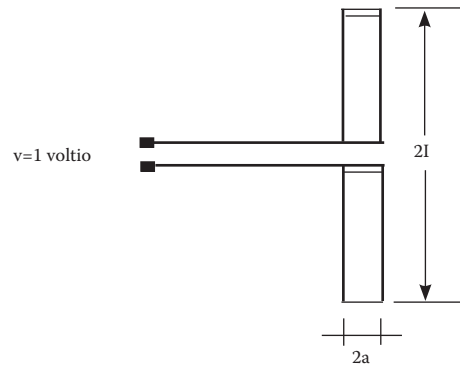


Figura 2. Antena Dipolo Cilíndrica Simétrica.

Se escoge dichas dimensiones debido a que se tienen para estas las mediciones de Mack [4] internacionalmente reconocidas, tal como se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Mediciones de Mack en ohmios

Longitud Dipolos	Mediciones Mack
$2l = 0.5 \lambda$	$97.61 + j37.95$
$2l = 0.75 \lambda$	$625.67 + j67.32$
$2l = 1.0 \lambda$	$264.06 - j434.92$

Las funciones de prueba deben estar espaciadas de forma equidistante entre sí para obtener los mejores resultados, tal como se muestra en (7).

$$z_n = (n - 1) \frac{l}{P} \quad (7)$$

Dónde:  $n = 1, 2, \dots, N = P + 1$  y P es el número de puntos de muestreo escogido.

En el caso de que se escoja el tercer orden para las funciones polinómicas de Popovich ( $P=3$ ), existirían 4 incógnitas complejas a evaluar:  $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$  y C así como los puntos de muestreo

que se observan en la Figura 3. Dichos puntos de muestreo están situados en:

$$Z_1 = 0, Z_2 = \frac{l}{3}, Z_3 = \frac{2l}{3} \text{ y } Z_4 = l,$$

Se escogen los valores en un solo brazo, ya que la distribución de corriente es simétrica en ambos brazos y podrían obtenerse ecuaciones idénticas por lo que el sistema de ecuaciones no sería linealmente independiente y no tendría solución.

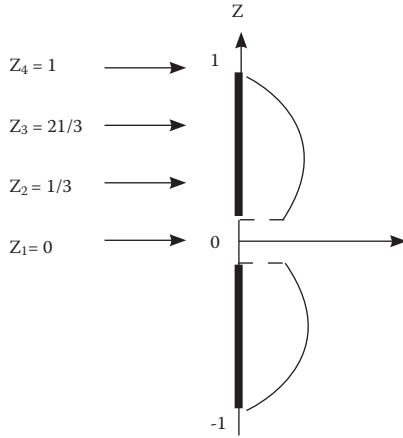


Figura 3. Puntos donde actúan las funciones de prueba.

Al aplicar las funciones de prueba, la ecuación (5) se transforma en un sistema algebraico de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas linealmente independiente [5], tal como aparece en (8),

$$\sum_{p=1}^3 I_p \int_{-l}^l f_p(z') \frac{e^{-jk\sqrt{(z_n - z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z_n - z')^2 + a^2}} dz' = c \cos(kz_n) - j \frac{V}{60} \text{sen}(k|z_n|) \quad (8)$$

De la ecuación (8) programada en MATLAB, se obtuvieron las constantes complejas  $I_1, I_2, I_3$  y  $C$  y con ellas la impedancia de entrada de la antena, tal como se muestra en (9), referencia [6].

$$Z_{ent} = \frac{V}{I_z(z'=0)} = \frac{V}{\sum_{p=1}^P I_p} \quad (9)$$

Sabiendo que  $P=3$  y  $V=1$  voltio se obtienen los valores de la impedancia de entrada en (10) para los diferentes casos planteados.

$$Z_{ent} = \frac{1}{I_1 + I_2 + I_3} = R_{ent} + jX_{ent} \quad (10)$$

Todos los resultados se obtuvieron de las ecuaciones analizadas mediante la programación en MATLAB. El sistema de 4 ecuaciones con 4

incógnitas genera un total de 16 ecuaciones integrales del tipo mostrado en (11).

$$F_{np}(z_n) = \int_{-l}^l \left(1 - \frac{|z'|}{l}\right)^p \frac{e^{-jk\sqrt{(z_n - z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z_n - z')^2 + a^2}} dz' \quad (11)$$

Para esas ecuaciones el MATLAB propone un valor de precisión en los resultados de las integrales de  $10^{-6}$ , lo que le toma un tiempo de máquina dado al emplear una PC, con sistema operativo y un procesador determinado. El objetivo de los autores se centra en variar esa precisión hacia valores menos precisos y comprobar hasta donde es posible deteriorar esa precisión sin provocar cambios notables en los resultados de la impedancia de entrada computada, al compararlos con las mediciones de Mack en la Tabla 1.

El efecto observado al reducir la precisión en el cálculo de cada una de las integrales, fue una disminución del tiempo de máquina total empleado, con el consiguiente incremento de la eficiencia computacional. Los resultados son expuestos a continuación.

### 3. RESULTADOS

Al ejecutar el cómputo de las tres antena Dipolo Simétrico de longitudes de onda  $2l = 0.50\lambda, 0.75\lambda$  y  $1.00\lambda$  y de radio  $a = 0.007022\lambda$  en una computadora con un procesador Core i3 y sistema operativo Windows 7 en comparación con las mediciones de Mack, se obtuvieron los resultados mostrados de la Figura 4 a la Figura 9.

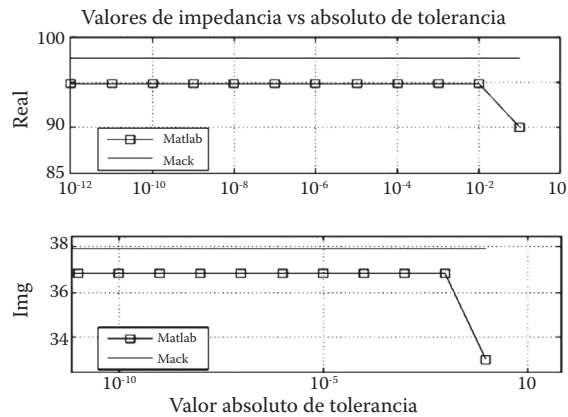
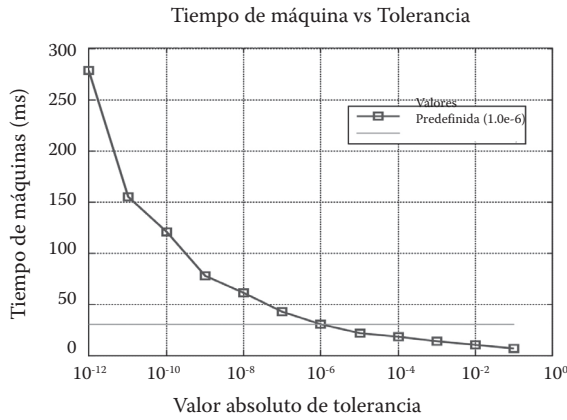
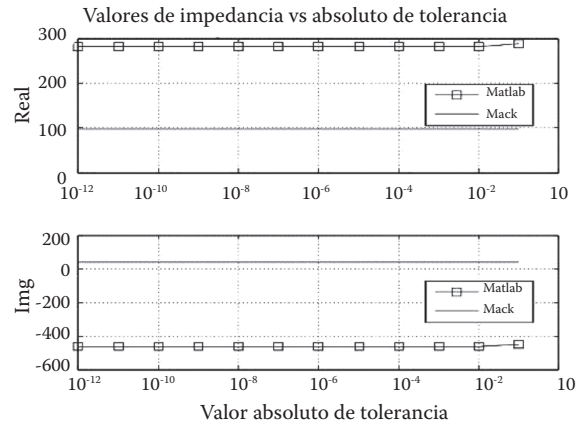


Figura 4. Impedancia de entrada de una antena Dipolo Simétrico de variando el valor de la tolerancia de  $2l = 0.50\lambda$  integración.

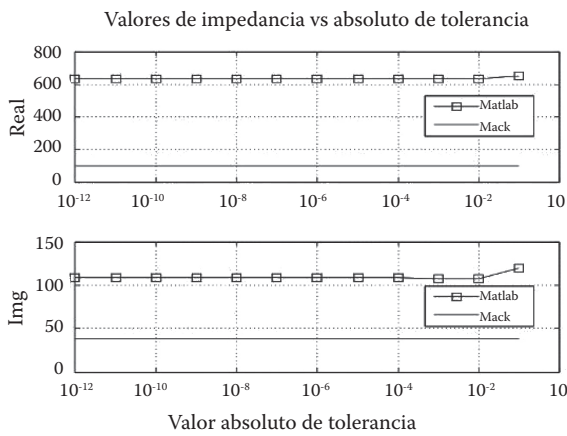
- Rango de tolerancia en la solución de las integrales generadas por el Método de los Momentos (MM) •



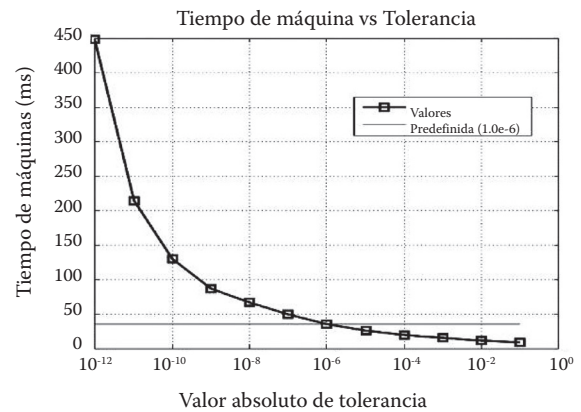
**Figura 5.** Tiempo de máquina empleado en el cómputo de una antena Dipolo Simétrico de  $2l = 0.50\lambda$  variando el valor de la tolerancia de integración.



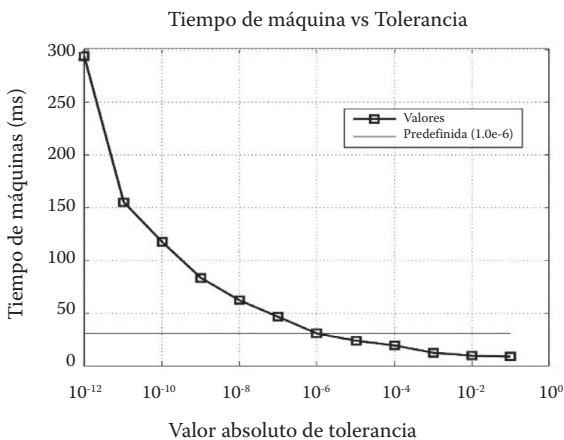
**Figura 8.** Impedancia de entrada de una antena Dipolo Simétrico de  $2l = 1.00\lambda$  variando el valor de la tolerancia de integración



**Figura 6.** Impedancia de entrada de una antena Dipolo Simétrico de  $2l = 0.75\lambda$  variando el valor de la tolerancia de integración



**Figura 9.** Tiempo de máquina empleado en el cómputo de una antena Dipolo Simétrico de  $2l = 1.00\lambda$  variando el valor de la tolerancia de integración

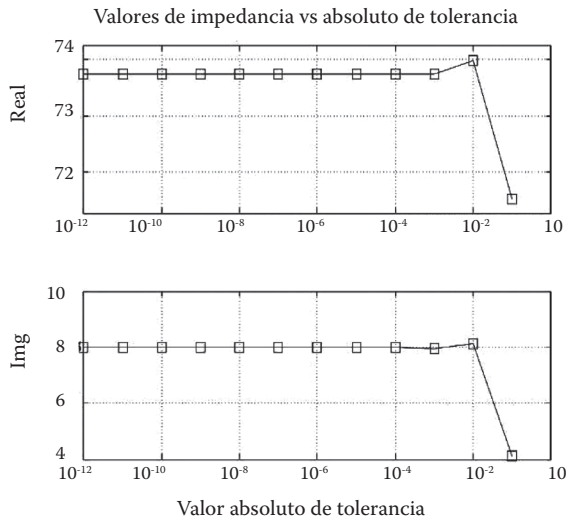


**Figura 7.** Tiempo de máquina empleado en el cómputo de una antena Dipolo Simétrico de  $2l = 1.00\lambda$  variando el valor de la tolerancia de integración

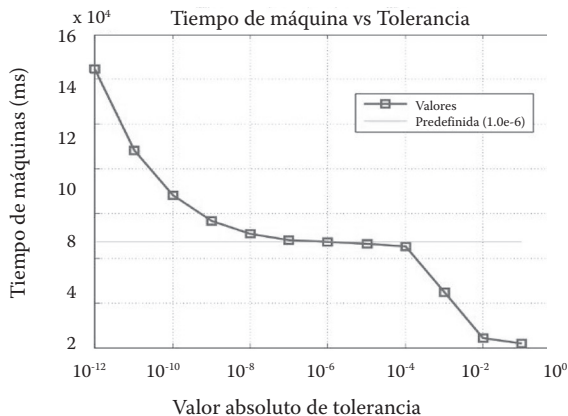
Al ejecutar el cómputo de los tres casos de antenas Dipolo Simétrico de longitudes  $2l = 0.50\lambda$ ,  $0.75\lambda$ ,  $1.00\lambda$  y de radio  $a = 0.007022\lambda$ , la disminución del tiempo de computación necesario, al variar la precisión de la integración de  $10^{-6}$  a  $10^{-2}$ , representó, en los tres casos una disminución de 14.1227 ms, 21.2713 ms y 24.6388 ms respectivamente. Realmente esos valores obtenidos no son relevantes en la ejecución de cada antena de forma individual o aislada.

A continuación se muestran los resultados para una antena formada por una cortina de 100 dipolos simétricos de longitud total  $2l = 0.50\lambda$ , con radio  $a = 0.007022\lambda$  situados en paralelo entre sí, formando una superficie plana, separados a una distancia  $d = 0.50\lambda$  y alimentados todos en fase. Igualmente se empleó una PC con un procesa-

por Core i3 y sistema operativo Windows 7. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 10 y la Figura 11.



**Figura 10.** Impedancia de entrada de una antena formada por 100 Dipolos Simétricos de  $2l = 0.50\lambda$  con separación de  $d = 0.50\lambda$  entre ellos, variando el valor de la tolerancia de integración.



**Figura 11.** Tiempo de máquina empleado en el cómputo de una antena formada por 100 Dipolos Simétricos de  $2l = 0.50\lambda$  con separación de  $d = 0.50\lambda$  entre ellas variando el valor de la tolerancia de integración.

En este caso el tiempo de máquina ahorrado por la computadora usando un procesador Core i3 y el sistema operativo Windows 7 creció notablemente, lográndose un ahorro total de 42000.94 ms (42.94 segundos) en el tiempo de máquina total al pasar de un valor de tolerancia de integración  $10^{-6}$  a  $10^{-2}$ , es decir cambiando el valor de  $10^{-6}$  recomendado por el MATLAB

para la evaluación de las integrales sin afectar los resultados finales obtenidos para la antena.

Las antenas formadas por cortinas de Dipolos Simétricos son empleadas en radares de vigilancia con movimientos de sus patrones de radiación por barrido electrónico, las cuales suelen tener cientos de estos elementos y en ocasiones miles de ellos, por lo cual el ahorro de los tiempos de máquina de computación en la obtención de sus parámetros de trabajo, suele ser un elemento importante

### III. CONCLUSIONES

En las Figura 4, Figura 6 y Figura 8 se observa que las impedancias de entrada de las antenas respectivas se mantienen con valores constantes al variar el valor absoluto de la tolerancia de integración, aplicada a las dieciséis integrales del sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas. Por lo que se puede emplear una tolerancia de  $10^{-2}$  y no la recomendada por el MATLAB de  $10^{-6}$ , sin que esto implique disminuir la precisión de los resultados de la impedancia de entrada de la antena.

En la Figura 10 se observa que la antena de 100 dipolos simétricos presenta el mismo comportamiento que el de un solo elemento, por lo que también es válido el empleo de un valor absoluto de tolerancia absoluta en la integración de  $10^{-2}$  sin menoscabo de los valores de impedancia de entrada computados para dicha antena. Los autores comprobaron esos resultados en antenas de 3, 10 y 30 dipolos simétricos, obteniendo resultados semejantes.

En cuanto a los tiempos de máquina empleados, se obtuvieron los resultados mostrados en la Figura 11. En este caso se formó un sistema de 400 ecuaciones con 400 incógnitas, es decir se evaluaron 160,000 integrales.

Por eso los autores de este artículo recomiendan bajar la precisión en la computación de las integrales a valores absolutos de  $10^{-2}$  en lugar de  $10^{-6}$ , sin que esto conlleve a errores notables en los resultados finales.

## REFERENCIAS

- [1] H. Sánchez, “Conferencias No.6 y 7 de la asignatura Antenas”, Aula Virtual, Dpto. de Telecomunicaciones, Universidad de Oriente, Santiago de Cuba, curso 2009-2010.
- [2] B.D. Popovich, “Polynomials approximation of current along thin Cylindrical Dipoles”, Proc. IEE, Vol. 117, No.5, pp. 873-878. May 1970.
- [3] R.F. Harrington, “Matrix methods for field problems”, Proc. IEEE, pp. 136-149, Feb. 1967.
- [4] R.B. Mack, “A study of Cylindrical Array”, Cruft Laboratory, Harvard Univ., Techn. Report 382 and 383, 1963
- [5] H. Sánchez, “Investigación de las características de radiación e impedancia de las antenas logarítmicas Periódicas de Dipolos”, Disertación al grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas, Univ. Central, Santa Clara, 1986.
- [6] H. Sánchez y F. Rosell, “Algunas cuestiones sobre las funciones auxiliares en el método numérico de los puntos adaptados”, Proceedings Conferencia Internacional CIE 2007, con ISBN: 978-959-250-352-6, efectuado del 18 al 22 de Junio del 2007, Santa Clara, Las Villas.