Acerca de los (des)acuerdos-aritméticos e hipótesis heurísticas entorno a un problema no rutinario diofántico (de aula)

Óscary Ávila-Hernández[1] *oavila179@unab.edu.co*
William González-Calderón[1]
Federico Ávila-Rodríguez[1]

[1] Universidad Autónoma de Bucaramanga. Facultad de Ciencias Sociales, Humanidades y Artes; Bucaramanga, Colombia

Resumen

Los griegos introducen lo «matemático» bajo la determinación de: las cosas, en cuanto surgen y se presentan por sí mismas; las cosas en cuanto son producidas artesanalmente por el hombre, y están presente como tales; las cosas en cuanto están en uso y en permanente disposición, pueden ser piedras y cosas semejantes, o cosas expresamente fabricadas con las que tenemos trato, sea que las definamos usemos o transformemos, o que solo las contemplemos (Heidegger, 1975). Sobre los desacuerdos profundos, Robert J. Fogelin plantea en su trabajo ¿Qué ocurre con los argumentos cuando el contexto no es ni normal ni cerca de lo normal? y bajo este panorama se atreve a decir que el contexto argumentativo se vuelve menos normal, y la argumentación en esta medida se hace imposible, e intenta dejar – inicialmente – para dicho evento por cierto, que las condiciones para la argumentación no existen, y que el lenguaje de la argumentación puede llegar a persistir, pero termina siendo inútil ya que apela a algo que no existe: un trasfondo compartido de creencias y preferencias. Bajo un análisis cualitativo, y situado en el aula, se proyecta la ruta heurística para dar solución a un problema que anida en la geometría.

Palabras clave: renovación curricular, educación básica, matemáticas, razonamiento, resolución de problemas.

Abstract

The Greeks introduced the "mathematical" under the determination of: things, as they arise and present themselves; things as they are produced by hand by man, and are present as such; Things, insofar as they are in use and in permanent disposition, can be stones and similar things, or expressly manufactured things with which we deal, whether we define them, use them or transform them, or whether we only contemplate them (Heidegger, 1975). Regarding deep disagreements, Robert J. Fogelin asks in his work: What happens to arguments when the context is neither normal nor close to normal? and under this panorama he dares to say that the argumentative context becomes less normal, and argumentation to this extent becomes impossible, and he tries to leave – initially – for said event by the way, that the conditions for argumentation do not exist, and that The language of argument may persist, but it ends up being useless since it appeals to something that does not exist: a shared background of beliefs and preferences. Under a qualitative analysis, and situated in the classroom, the heuristic route is projected to provide a solution to a problem that nests in geometry.

Keywords: Curriculum renewal, Basic education, Mathematics, Reasoning, Problem solving.

Preliminares e introducción

Desde 1930 el término «fundamento» tuvo carrera hasta bien finalizado el siglo XX, al punto que la discusión y estudio se ha ubicado dentro de la Teoría de Conjuntos o dentro del enlace de esta teoría axiomática con la mencionada teoría de categorías, tal como lo ha referenciado Javier de Lorenzo en sus manuscritos como "La matemática: de sus fundamentos y crisis". Sin embargo, las consecuencias que producen las tres corrientes de las matemáticas – el formalismo, el logicismo y el intuicionismo – durante el siglo XX en cuanto a la fundamentación de esta ciencia, se llega a resumir confirmando que la matemática no es otra cosa que una ciencia formal o ciencias de las estructuras formales, y que por ello debe ser desarrollada bajo una ruta o estilo "axiomático" utilizando un adecuado simbolismo para resumir ambigüedades, y proporcionar máxima generalidad y abstracción a sus principios, postulados, lemas, teoremas, conjeturas, e hipótesis como la referenciada Hipótesis de la Función $\zeta(s)$ de Riemann (De Lorenzo, 1998).
La actividad de la «**definición**» no es una tarea exclusivamente de filósofofos, filólogos y científicos, no obstante, frente a la tarea de "definir" un término – abstruse y profundo – generalmente se recurre parafraseando en términos de un vocabulario más familiar (Quine, 1984). En el campo de la investigación de la matemática se recurre a las definiciones, un ejemplo, en que en área de la teoría aritmética de números es conocida la definición de ser número primo, como aquel número natural [n] que únicamente tiene dos divisores enteros positivos; en el Análisis Real se puede enunciar -definir- la existencia del límite

de una función ($\breve{g}: R \rightarrow R$)

Acudiendo al criterio (ϵ- δ), en el Álgebra Lineal por ejemplo se define el concepto de K-*espacio* vectorial recurriendo al fundamento y estructura algebraica $(K, +, .)$ de ser un cuerpo, y para definir una topología (T) sobre un conjunto {X} distinto de vacío, es necesario recurrir al concepto esencial del conjunto y familia de partes [P(X)], y se requiere que: P(X) ↄ T. Es decir, que la Topología se encuentre contenida e inmersa en la familia de partes {P(X)} (Munkres, 2002). Por tanto, entendemos que toda investigación – básica o aplicada – es una posibilidad óntica del "ser ahí". La existencia encuentra sentido en la temporalidad, pero es a la par la condición de iniciar una posibilidad de "historicidad" como una temporal forma de ser del "ser ahí" mismo, prescindiendo de si éste y como éste es un ente "en el tiempo". Bajo lo anterior proyectado se pretender fundamentar, y ligar, la necesidad temporal de «deconstruir» el aula de clases con una posibilidad ontológica frente al logos existente en el educando en cuanto a lo «matemático». Se suele afirmar que el corazón de las ciencias matemáticas está compacto a la resolución de problemas, e igualmente, dentro de esta ciencia surgen tres escenarios de investigación: plantear hipótesis (problemas abiertos) tipo conjeturas, generar una solución dentro de una teoría axiomática consistente para las referenciadas conjeturas, e igualmente probar (argumentar) ante un grupo de jurados la solución a dichos problemas abiertos e hipótesis (Ávila-Hernández, 2023). El escenario de investigación ligado a la dificultad en el desenvolvimiento del pensamiento algebraico, ha sido tratado por la corriente francesa de la didáctica de las matemáticas, la cual ha generado conocimientos y constructos sobre el tránsito y pasaje de la Aritmética hacia el Álgebra (Cambrigilia, 2018). Algunos referentes teóricos han mostrado la preocupación frente al riesgo potencial de no brindar al educando oportunidades para que él pueda transitar de manera ordenada y consiente desde lo concreto a lo abstracto y, por el contrario se le encamina de lleno hacia una simbología de categoría abstracta propia de las estructuras algebraicas, sin que antes logre la oportunidad de participar en experiencias propias de la aritmética, que le sirvan como logos y fundamento para otorgarle sentido y significado a los conceptos, e igualmente a los procesos representados simbólicamente (González, 2013).

Los desacuerdos: heurística y resolución de problemas

La reforma al currículo de matemáticas data de los años 50, y dicho trabajo tiene lugar en los Estados Unidos, lo cual llevó a diseñar planes de investigación para guiar la mejora de los cursos de matemáticas y su enseñanza. Posteriormente en 1960 se presentan tres conferencias importantes, en las cuales se establecen las bases del desarrollo posterior de la investigación en la educación matemática, la necesidad de un servicio que proporcionara acceso a la información del momento sobre los problemas de la educación matemática a nivel internacional, e identificar los problemas, modelos teóricos, diseños de investigación. Así mismo se determinó las condiciones institucionales y científicas para trasladar e incorporar las investigaciones en educación matemática a los grados académicos superiores. Dentro de la Didáctica de la Matemática, frecuentemente se presenta el escenario del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) o Resolución de Problemas, concepto que proviene de la Escuela Anglosajona, y cuya raíz se fundamenta en los trabajos emprendidos por George Polya durante 1954 a 1981. El concepto de un Problema para este trabajo de investigación inicia bajo la postura de Polya el cual define "Tener un problema significa buscar de forma consiente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de forma inmediata", inmersos en esta ruta epistemológica y bajo una praxis en el aula de matemáticas, coincidimos con la presencia de 3 elementos y características, en el marco de un solución de un problema matemático: (1) un grupo binomial (educador-educando) que ha de resolver la actividad. (2) Inicialmente se manifiesta un punto de partida, y un objetivo para alcanzar. (3) Existen dificultades o bloqueos que no permiten rápidamente accede al objetivo o meta. (Rodríguez, 2015; Ávila-Hernández, 2016).

En 1985 Robert Fogelin enuncia – y define – a los desacuerdos profundos como los desacuerdos generados por conflictos entre proposiciones estructurales, y que estos se mantienen renuentes a ser resueltos por que las fuentes del desacuerdo -las proposiciones estructurales- yacen en el trasfondo, trabajando a distancia. Por tanto, la forma de situar el debate en principios racionales sería hacer emerger estas proposiciones básicas, para luego discutirlas directamente (Mejía-Saldarriaga, 2019, p. 95).

Doxa e hipótesis de aula

Los dos resultados diofánticos que se desprenden de la situación geométrica, y abordados con los educandos, bajo una heurística ad-hoc en la vía de la resolución de problemas son resultados ligados a la figura plana más sencilla de la geometría, el triángulo, y se ha llago a señalar que dentro de las matemáticas su importancia radica en que es el ladrillo básico de la Geometría, ya que en plano todos los demás polígonos se pueden expresar descomponer como una sucesión de triángulos (De León & Timón, 2017).

Proposición (1). La tripleta de números naturales (3,4,5) forma un triángulo rectángulo, y es única bajo la composición aritmética de ser enteros consecutivos.

Proposición (2). No existe triángulo equilátero cuyos lados sean enteros, y su área también sea un entero.

Estos resultados de aula, de estructura propositiva no rutinaria, se encuentran compactos y soportados al concepto e ideario escolar sobre la demostración matemática. Ideario donde se requiere:

(1) Un alfabeto de símbolos.

(2) Un conjunto de cadenas finitas de dichos símbolos, denominadas fórmulas bien formadas «fbfs», preliminarmente nos hemos de imaginar que estas son las palabras y frases de nuestro lenguaje (formal).
(3) Un conjunto de fórmulas bien formadas, llamadas axiomas.
(4). Un conjunto finito de «reglas de deducción», las cuales permiten deducir una fórmula bien formada «fbf»,tal como ($\bar{A}$) es «consecuencia directa» de un listado finito de fórmulas «fbf», tales como $\{A_1, A_2, A_3,\ldots,A_k\}$ (Hamilton, 1981).

Por ello una demostración en un sistema formal (L) es una sucesión finita de fórmulas bien formadas «fbfs». $\{A_1, A_2, A_3,\ldots,A_k\}$ tal que para todo (i) ($1 \leq i \leq n$), se tendrá que $\mathbf{A_{(i)}}$ es un axioma en (L) o $\mathbf{A_{(i)}}$ se deduce a partir de dos miembros anteriores de la sucesión, digamos $\mathbf{A_{(j)}}$ y $\mathbf{A_{(k)}}$ (donde j<i , k<i) como consecuencia directa, aplicando la regla de deducción modus ponens (MP). Específicamente en este trabajo las dos proposiciones están conexas respectivamente a los resultados del Teorema de Pitágoras, y a la expresion de la Fórmula de Herón.
Fórmula de Herón: Sean {A, B, C} las longitudes respectivas de los lados de un triángulo, entonces el área del mencionado triangulo (∆) está dada por la expresion:

Área ∆= SS-AS-BS-C donde, S=A+B+C2

Metodología

Bajo 4 sesiones de aula, de 75 minutos cada, se introducen los elementos básicos de categoría aritmética y algebraicos para dar solución a las dos proposiciones descritas en la sección anterior, se aplica dos pruebas diagnósticas en un grupo de 25 educandos de grado noveno (9º) que comparte el escenario académico de aula urbana, dentro de una institución pública del departamento de Santander, y en la vía del paradigma de investigación cualitativa, con un método de estudio de casos, se pretende proyectar y describirlos espacios argumentativos que anidan entre pensamiento aritmético y algebraico bajo la resolución de problemas diofánticos, donde la teoría elemental de números tiene un rol situado y asistido dentro de lo no rutinario en el aula. Para el mencionado rol, se acude a la estructura previamente desarrollada por los destacados referentes de la figura 1.

Figura 1. Estructura de Godino & Batanero (1994)

Resultados y análisis

Bajo una praxis en educación matemática, se postula una hoja de ruta subsidiaria para la mencionada investigación, se implementa un esquema (ad-hoc) empírico para afrontar la pregunta y escenario de investigación sobre la resolución de problemas y sus dificultades, que emergen en el aula para un tránsito de la Aritmética al Álgebra bajo la noción de la analiticidad de categoría diofántica.

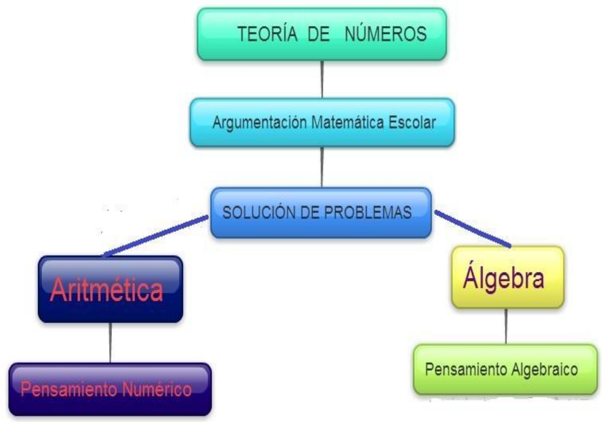

Figura 2. González y Ávila-Hernández, 2017.

Aportes de la investigación

En la solución de estos dos problemas propios de la **geometría diofántica**, como un pretexto para la construcción de rutas empíricas en el educando que favorezca el paso desde la Aritmética hacia el Álgebra, se postula la existencia de una estructura de la lógica, la referenciada «analiticidad», debido a los procesos de definición, abstracción y sinonimia presentes en la matemática clásica, la cual está comprometida hasta el cuello en una ontología de estructuras abstractas. De forma preliminar y elemental, el ideario acerca de la «analiticidad» es la de una relación entre enunciados y lenguajes: específicamente un enunciado (E) se dice que es analítico para un lenguaje (L), y el problema consiste en producir un sentido general de esa relación, es decir, para "E" y "L" como variables e invariantes (Quine, 1984).

Conclusiones

En el marco de la resolución de problemas del aula escolar, el afrontar la solucion a ejercicios no rutinarios de categoría diofántica, el educando potencialmente se llegaría a comprometer con tareas naturales e inmersas dentro de la matemática, tales como la definición, la argumentación e inferencia para finalmente llegar a una lectura y análisis de una prueba matemática.

Agradecimientos

Nuestros agradecimientos a los profesores María Cardozo Delgado, Carlos Alberto Cardozo Delgado, Elgar Gualdrón Pinto, a la coordinación académica de la maestría en educación de la

Universidad Autónoma (UNAB), a los grupos GINCAP y Edumatest de las Universidades UNAB y de Pamplona.

Referencias

Ávila-Hernández, Ó. (2016). Sobre la doxa y el logos en el aula de matemáticas frente a la argumentación. *Revista colombiana de Matemática Educativa*, 1(1b), pp. 40-42.

Ávila-Hernández, Ó. (2023). *Definiciones ostensivas, analiticidad e invariantes (aritméticos) de aula: heurística diofántica y matemática-eidal* (Investigación Tesis de Maestría). Universidad Autónoma de Bucaramanga, Bucaramanga. Colombia.

Cambriglia, V. (2018). *Emergentes colectivos de generalización en la entrada al Álgebra*. Tesis doctoral, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.

De León, M. y Timón, A. (2017). *La engañosa sencillez de los triángulos: de la fórmula de Herón a la Criptografía*. Madrid: Federación española de sociedades de profesores de matemáticas.

De Lorenzo, J. (1998). La matemática: de sus fundamentos y crisis. Madrid, España: Editorial Tecnos

Godino, J.D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. Recherches en Didactique des Mathématiques 14(3), 325-355.

González, F. (2013). *Introducción al pensamiento algebraico. Estudio y reconocimiento de patrones*. Núcleo de Investigación en Educación Matemática Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela.

González, W, y Ávila-Hernández, Ó. (2017). *Pruebas y discurso matemático en los educandos de Secundaria*. En: Salcedo. A (Comp.). *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, (pp. 131-144). Caracas: Centro de investigaciones educativas, Escuela de Educación. Universidad Central de Venezuela. Venezuela.

Hamilton, A.G. (1981). Lógica para matemáticos. Madrid, España. Ediciones Paraninfo.

Heidegger, M. (1975). *La pregunta por la cosa.* Buenos Aires: Editorial Ediciones Orbis.

Mejía-Saldarriaga, D. (2019). *Presentación y traducción de Robert J. Fogelin: La Lógica de los desacuerdos profundos*. Revista Iberoamericana de Argumentación, 19, (pp. 84-99).

Munkres, J.R. (2002). *Topología*. Madrid, España: Pearson Educación.

Rodríguez, M.A (2015). Resolución de problemas. En: Pochulu. M.D, Rodríguez. M (Comp.). *Educación Matemática Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* (pp. 153-174). Córdoba: Universidad Nacional de Villa María, Argentina.

Quine, W. V. (1984). *Desde un punto de vista lógico*. Madrid, España: Ediciones Orbis.